Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 19

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei V ein K-Vektorraum, $f : V \to V$ ein Endomorphismus, und $U_i \subset V$, $i \in I$ eine Familie von invarianten Unterräumen. Verifizieren Sie, dass dann auch der Durchschnitt

$$\bigcap_{i \in I} U_i \subset V$$

ein invarianter Unterraum ist. Folgern Sie daraus, dass es zu jeder Teilmenge $X \subset V$ einen kleinsten invarianten Unterraum $U \subset V$ gibt, der X enthält.

Aufgabe 2. Sei A eine reelle 2×2-Matrix mit

$$\operatorname{tr}(A)^2 > 4 \det(A).$$

Zeigen Sie, dass es genau vier A-invariante Unterräume $U \subset \mathbb{R}^2$ gibt. Geben Sie weiterhin ein Beispiel mit $\operatorname{tr}(A)^2 = 4 \det(A)$ an, das genau drei invariante Unterräume erlaubt.

Aufgabe 3. Sei V ein K-Vektorraum und $f, g : V \to V$ zwei kommutierende Endomorphismen, also

$$f \circ g = g \circ f.$$

Beweisen Sie, dass jeder Eigenraum $U = \operatorname{Ker}(\lambda \operatorname{id}_V - f)$ von f ein invarianter Unterraum $U \subset V$ für g ist.

Aufgabe 4. Sei $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ ein Matrix, für die jeder Untervektorraum $U \subset K^n$ invariant ist. Folgern Sie, dass es sich um eine Skalarmatrix handeln muss.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 11. April um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Hinweise zum Bearbeiten der Übungsaufgaben:

1. Beschäftigen Sie sich bereits *ab dem Ausgabetag* mit den Übungsaufgaben.
2. Schlagen Sie in Ihrer Vorlesungsmitschrift sowie einem Lehrbuch die exakte Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe nach. Verdeutlichen Sie sich die Aussagen durch *Beispiele* und *Spezialfälle*.
3. *Diskutieren* Sie mit Ihren Kommilitonen über die Aufgaben.
4. Schreiben Sie Ihre Lösungen in *vollständigen und korrekten deutschen Sätzen* auf! Die Verwendung von logischen Symbolen wie $\forall, \exists, \Leftrightarrow$ ist im Fließtext grundsätzlich unzulässig! In abgesetzten Formel sind diese erlaubt. Nichtbeachtung führt zu Punktabzug.
5. Wenn Sie eine Gleichheit $X = Y$ von Mengen zeigen wollen, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Inklusion $X \subset Y$ und $Y \subset X$ verifizieren.
6. Wollen Sie beweisen, dass „A genau dann gilt, wenn B gilt“, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Implikation „wenn A, dann B“ sowie „wenn B, dann A“ zeigen! (Ersteres besagt, dass B *notwendig* für A ist, während Letzteres bedeutet, dass B *hinreichend* für A ist.)
7. Die Aussage „wenn A, dann B“ ist äquivalent zur Aussage „wenn B nicht gilt, dann gilt A nicht“.
8. Wollen Sie zeigen, dass eine Aussage falsch ist, reicht es, ein *einziges Gegenbeispiel* anzugeben! Aus Bequemlichkeit wähle man dieses so einfach wie möglich.
9. Wenn Sie Resultate *aus der Vorlesung zitieren* wollen, verwenden Sie die Nummerierung der Vorlesung oder benennen sie das Resultat. Zum Beispiel „Wegen Proposition 4.7 gilt ...“ oder „Nach Basisergänzungssatz können wir ...“.
10. Alle Abgaben müssen *individuell, handschriftlich, und ohne elektronische Hilfsmittel* verfasst sein.
11. Verwenden Sie *Deckblatt* und *Heftklammern* für Ihre Abgaben!