Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS19

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 2

Aufgabe 1. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ Matrizen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Ist A trigonalisierbar, so auch die Transponierte ${}^tA$.

(ii) Sind A, B trigonalisierbar, so auch die Summe $A + B$.

(iii) Sind A, B trigonalisierbar, so auch das Produkt AB.

(iv) Ist A trigonalisierbar, so auch die Potenzen A^r, $r \geq 0$.

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$. Wir bezeichnen die gleiche Matrix, aufgefasst als reelle Matrix, mit $B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$. Begründen Sie zu folgender Tabelle, welche Kominationen möglich sind und welche nicht.

	A nicht trig.	A trig. aber nicht diag.
B nicht trigonalisierbar		
B trig. aber nicht diag.		
B diagonalisierbar		

Aufgabe 3. Wir betrachten die ganzzahlige Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 9 & 1 & 7 \\ -14 & -2 & -12 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie für die Körper $K = \mathbb{Q}, \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_2$ die algebraischen und geometrischen Multiplizitäten $v_\lambda \geq m_\lambda$, und finden Sie heraus, ob A trigonalisierbar oder diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Beweisen Sie, dass f trigonalisierbar ist genau dann, wenn es eine Folge von invarianten Unterräumen

$$0 = U_0 \subset U_1 \subset \ldots \subset U_n = V$$

mit der Eigenschaft $\dim(U_r) = r$ gibt.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 18. April um 8:25 Uhr im Zettelkasten.