

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 3

Aufgabe 1. Listen Sie die möglichen Jordan-Normalformen für nilpotente $n \times n$ -Matrizen für die Zahlen $n = 5$ und $n = 6$. Geben Sie dafür zuerst die entsprechenden Zahlpartitionen und Young-Diagramme an.

Aufgabe 2. Sei $V \subset K[T]$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad $\deg(P) \leq 5$. Verifizieren Sie, dass der Ableitungsoperator

$$\frac{\partial}{\partial T} : V \longrightarrow V, \quad T^n \longmapsto nT^{n-1}$$

nilpotent ist, und bestimmen Sie dessen Jordan-Normalform in Abhängigkeit von der Charakteristik $p \geq 0$.

Aufgabe 3. Sei V ein K -Vektorraum von Dimension $n = 2$. Gegeben seien zwei nilpotente Endomorphismen $f, g : V \rightarrow V$, deren Verkettung ebenfalls nilpotent ist.

- (i) Beweisen Sie mithilfe der Jordan-Normalform, dass dann $f \circ g = 0$.
- (ii) Bleibt diese Aussage für $n = 3$ richtig?

Aufgabe 4. Seien N_i , $1 \leq i \leq 5$ die fünf möglichen Jordan-Normalformen für nilpotenten 4×4 -Matrizen. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi : \{N_1, \dots, N_5\} \longrightarrow \{N_1, \dots, N_5\},$$

welche $A = N_i$ auf die Jordan-Normalform N_j von der Potenz A^2 abbildet. Stellen Sie zu dieser Abbildung die Wertetabelle auf.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 25. April um 8:25 Uhr im Zettelkasten.