Mathematisches Institut SS19
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und T eine Unbestimmte. Zeigen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ genau dann nilpotent ist, wenn

$$\det(E - TA) = 1$$

gilt. Verwenden Sie dafür den Skalar $T^{-1} = 1/T$ aus dem rationalen Funktionenkörper $F = K(T)$.

Aufgabe 2. Sei V eine endlich-dimensionaler Vektorraum und $f : V \to V$ ein Endomorphismus. Beweisen Sie, dass jeder verallgemeinerter Eigenraum

$$V_{(\lambda)} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathrm{Ker}(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^i$$

bereits der Kern der Potenz $(f - \lambda\,\mathrm{id}_V)^v$ ist, wobei der Exponent $v = v_\lambda$ die algebraische Multiplizität des Skalars $\lambda \in K$ ist.

Aufgabe 3. Sei $A \in \mathrm{Mat}_4(K)$ nilpotent. Welche Jordan-Normalform muss A haben, damit es eine Wurzel besitzt, d.h. $A = B^2$ für eine andere Matrix $B \in \mathrm{Mat}_4(K)$?

Aufgabe 4. Wir betrachten die 4×4-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 6 & 6 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \\ 4 & 6 & 6 & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_7),$$

deren Spektrum die Menge $\sigma(A) = \{1, 5\}$ ist.

(i) Bestimmen Sie zu den Eigenwerten die geometrischen und algebraischen Multiplizitäten $m_\lambda \leqslant v_\lambda$.
(ii) Berechnen Sie Basen für die Eigenräume und verallgemeinerten Eigenräume $V_\lambda \subset V_{(\lambda)}$ im Standardvektorraum $V = (\mathbb{F}_7)^4$.

(iii) Entscheiden Sie, ob A diagonalisierbar oder trigonalisierbar ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 2. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.