

## Übungen zu Lineare Algebra II

### Blatt 6

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie explizit mit dem euklidischen Algorithmus den größten gemeinsamen Teiler  $G = \text{ggT}(P, Q)$  der Polynome

$$P = T^6 - \lambda T^3 - 2T + 1 \quad \text{und} \quad Q = T^3 - \alpha T^2 + T - 3$$

über dem Primkörper  $\mathbb{F}_{11}$ . Hierbei ist  $\lambda \geq 0$  die letzte Ziffer ihrer Matrikelnummer und  $\alpha \geq 0$  die Anzahl der Buchstaben in Ihrem Nachnamen ist.

**Aufgabe 2.** Bestimmen Sie alle Homomorphismen von  $\mathbb{R}$ -Algebren

$$h : \mathbb{C} = \mathbb{R}[T]/(T^2 + 1) \longrightarrow \text{Mat}_2(\mathbb{R}),$$

indem Sie alle reellen  $2 \times 2$ -Matrizen  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  mit  $A^2 = -E$  angeben. Bestimmen Sie dabei auch die Jordan-Normalform über den komplexen Zahlen.

**Aufgabe 3.** Wir betrachten die ganzzahlige Begleitmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass  $A \in \text{Mat}_3(\mathbb{F}_5)$  nicht trigonalisierbar ist.
- (ii) Konstruieren Sie eine Körpererweiterung  $L = \mathbb{F}_5[T]/(P)$  mit  $\text{Card}(L) = 25$  so, dass  $A \in \text{Mat}_3(L)$  trigonalisierbar wird.
- (iii) Geben Sie das Spektrum und die Jordan-Normalform von der Matrix  $A$  über dem Körper  $L$  an.

**Aufgabe 4.** Konstruieren Sie mit MAGMA eine  $5 \times 5$ -Matrix  $A = (\lambda_{ij})$  über dem endlichen Körper  $K = \mathbb{F}_{19}$  mit folgenden drei Eigenschaften:

(i) Die Matrix  $A$  ist nilpotent mit  $A^3 = 0$ .

(ii) Alle Einträge sind  $\lambda_{ij} \neq 0$ .

(iii) Die Jordan-Normalform  $N$  von  $A$  besteht aus zwei Jordan-Blöcken.

Benutzen Sie dazu den frei zugänglichen *Magma Calculator* auf der Webseite

<http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/>,

und geben Sie die verwendeten Befehle an.

**Abgabe:** Bis Donnerstag, den 16. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.