Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS19

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei $V \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ der 4-dimensionale reelle Untervektorraum aller komplexen Matrizen der Form

$$B = \begin{pmatrix} x & z \\ \bar{z} & y \end{pmatrix}$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$. Rechnen Sie nach, dass

$$\Phi(B, C) = \det(B + C) - \det(B) - \det(C)$$

eine Bilinearform auf V ist. Wählen Sie eine Basis $B_1, \ldots, B_4 \in V$ und stellen Sie die Gram-Matrix auf.

Aufgabe 2. Wir betrachten die 2×2-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

Beweisen Sie, dass A, B als komplexe Matrizen kongruent sind, jedoch als reelle Matrizen nicht kongruent sind.

Aufgabe 3. Sei V ein drei-dimensionaler Vektorraum, $\lambda \in K^\times$ ein Skalar, und $a_1, \ldots, a_3 \in V$ eine Basis. Drücken Sie die duale Basis $b_1^*, b_2^*, b_3^* \in V^*$ zur Basis

$$b_1 = a_1 + a_2 - a_3, \quad b_2 = a_3, \quad b_3 = \lambda a_2$$

durch die duale Basis $a_1^*, \ldots, a_3^* \in V^*$ aus.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K von Charakteristik $p \geq 0$. Wir betrachten den Endomorphismus

$$\mathrm{Bil}(V, K) \longrightarrow \mathrm{Bil}(V, K), \quad \Phi \longmapsto \Phi',$$

welcher eine Bilinearform $\Phi(x, y)$ auf die Bilinearform $\Phi'(x, y) = \Phi(y, x)$ schickt. Berechnen Sie die Jordan-Normalform zu $\Phi \mapsto \Phi'$. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $p \neq 2$ und $p = 2$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 29. Mai um 16:25 Uhr im Zettelkasten.