Mathematisches Institut
Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 19

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra II

Zweite Klausur am 1. Oktober 2019

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

- Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.
- Anderes mitgebrachte Papier, Bücher oder elektronische Geräte bleiben während der gesamten Prüfung verstaut.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis sichtbar aus und tragen Sie oben Ihre Daten ein.
- Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie Ihre Antworten.
- Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

1	2	3	4	5	Summe	Note

Aufgabe 1. Sei $f : V \to V$ ein nilpotenter Endomorphismus auf einem n-dimensionalen K-Vektorraum V. Angenommen, es gilt

$$n \geq 2 \quad \text{und} \quad \chi_f(T) = \mu_f(T).$$

Bestimmen Sie die Jordan-Normalform, und finden Sie einen invarianten Unterraum $U \subset V$, der kein invariantes Komplement erlaubt.

Aufgabe 2. Auf dem Standardvektorraum $V = \mathbb{R}^3$ betrachten wir die symmetrische Bilinearform Φ_t zur Gram-Matrix

$$A_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & t & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie, für welche Parameter $t \in \mathbb{R}$ die Bilinearform Φ_t nicht-entartet ist, und berechnen sie dafür die Signatur.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_3)$$

trigonalisierbar ist, und bestimmen Sie die Jordan-Normalform.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_3(K)$ eine Matrix ohne Eigenwert $\lambda \in K$. Zeigen Sie, dass dann $\mu_A(T) = \chi_A(T)$ gelten muss, und listen Sie im Spezialfall $K = \mathbb{F}_2$ die möglichen charakteristischen Polynome auf.

Aufgabe 5. Wir betrachten über dem Körper $K = \mathbb{C}$ das Kronecker-Produkt

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Polynome $\chi_P(T)$ und $\mu_P(T)$, skizzieren Sie das Spektrum $\sigma(P) \subset \mathbb{C}$, und entscheiden Sie, ob P diagonalisierbar ist.