Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS20

Übungen zur Algebra

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $G = \{e, a, b\}$ eine Gruppe von Ordnung $|G| = 3$.

(i) Deduzieren Sie aus den Gruppenaxiomen, dass $a^2 = b$ gilt.

(ii) Folgern Sie, dass alle Gruppen von Ordnung drei isomorph sind.

(iii) Berechnen sie die Automorphismengruppe $\Gamma = \mathrm{Aut}(G)$.

Aufgabe 2. Sei $G = \{e, a, b, c\}$ eine Gruppe von Ordnung $|G| = 4$.

(i) Verifizieren Sie, dass man nach Umbenennung der Elemente

$$a^2 \neq c \quad \text{und} \quad \mathrm{ord}(a) \geq \mathrm{ord}(b), \mathrm{ord}(c)$$

zusätzlich annehmen kann.

(ii) Zeigen Sie, dass entweder $a^2 = e$ oder $a^2 = b$ gilt, und dass beide Fälle auftreten können.

(iii) Folgern Sie, dass es genau zwei Isomorphieklassen von Gruppen der Ordnung vier gibt.

(iv) Was sind deren Automorphismengruppen $\Gamma = \mathrm{Aut}(G)$?

Aufgabe 3. Sei $f : G \to H$ eine Abbildung zwischen zwei Gruppen. Zeigen Sie, dass f ein Homomorphismus ist genau dann, wenn der Graph $\Gamma_f \subset G \times H$ eine Untergruppe ist.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe,

$$\mu : G \times G \longrightarrow G, \quad (a, b) \longmapsto ab \quad \text{und} \quad \iota : G \longrightarrow G, \quad a \longmapsto a^{-1}$$

das Gruppengesetz beziehungsweise die Inversenabbildung. Beweisen Sie, dass die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(i) Die Gruppe G ist kommutativ.

(ii) Die Abbildung μ ist ein Homomorphismus.

(iii) Die Abbildung ι ist ein Homomorphismus.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 29. April um 8:25 Uhr über ILIAS.

Prozedur für virtuelle Lehre: Bis auf weiteres erfolgen die Abgaben über die Lernplattform ILIAS, bei der Sie sich mit ihrer HHU-Kennung einloggen. Die Abgaben müssen handschriftlich und individuell sein und in Form einer einzigen pdf-Datei vorliegen, mit folgender Bezeichnung beim ersten Blatt:

`NameVorname--Abgabe01.pdf`

Sie können z.B. Ihre aufgeschriebenen Lösungen mit Smartphone abphotographieren und von jpg in pdf umwandeln, unter Linux etwa mit dem Befehl `convert *.jpg NameVorname--Abgabe01.pdf`. Die Abgabe erfolgt auf ILIAS beim *Kurs Algebra* in ihrer *Gruppe* unter *Abgaben*. Dort werden Sie dann auch die Korrektur als `NameVorname--Korrektur01.pdf` finden.

Hinweise zum Bearbeiten der Übungsaufgaben:

(i) Beschäftigen Sie sich *ab dem Ausgabetag* mit den Übungsaufgaben.

(ii) Schlagen Sie in Ihrer Vorlesungsmitschrift sowie einem Lehrbuch die exakte Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe nach. Verdeutlichen Sie sich die Aussagen durch *Beispiele* und *Spezialfälle*.

(iii) *Diskutieren* Sie mit Ihren Kommilitonen über die Aufgaben.

(iv) Schreiben Sie Ihre Lösungen in *vollständigen und korrekten deutschen Sätzen* auf! Die Verwendung von logischen Symbolen wie $\forall, \exists, \Leftrightarrow$ ist im Fließtext grundsätzlich unzulässig! In abgesetzten Formel sind diese erlaubt. Nichtbeachtung führt zu Punktabzug.

(v) Wenn Sie eine Gleichheit $X = Y$ von Mengen zeigen wollen, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Inklusion $X \subset Y$ und $Y \subset X$ verifizieren.

(vi) Wollen Sie beweisen, dass „A genau dann gilt, wenn B gilt“, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Implikation „wenn A, dann B“ sowie „wenn B, dann A“ zeigen! (Ersteres besagt, dass B *notwendig* für A ist, während Letzteres bedeutet, dass B *hinreichend* für A ist.)

(vii) Die Aussage „wenn A, dann B“ ist äquivalent zur Aussage „wenn B nicht gilt, dann gilt A nicht“.

(viii) Wollen Sie zeigen, dass eine Aussage falsch ist, reicht es, ein *einziges Gegenbeispiel* anzugeben! Man wähle dieses so einfach wie möglich.

(ix) Wenn Sie Resultate *aus der Vorlesung zitieren* wollen, verwenden Sie die Nummerierung der Vorlesung oder benennen sie das Resultat. Zum Beispiel „Wegen Proposition 4.7 gilt ...“ oder „Nach dem Satz von Lagrange können wir ...“.

(x) Alle Abgaben müssen *individuell und handschriftlich* verfasst sein.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS20

Übungen zur Algebra

Blatt 2

Aufgabe 1. Wir betrachten die Gruppe $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_5)$. Welche der folgenden Teilmengen $H \subset G$ sind Untergruppen? Welche davon sind Normalteiler?

(i) Die Teilmenge der Skalarmatrizen.

(ii) Die Teilmenge der Diagonalmatrizen.

(iii) Die Teilmenge der symmetrischen Matrizen.

(iv) Die Teilmenge der oberen Dreiecksmatrizen.

(v) Die Teilmenge der trigonalisierbaren Matrizen.

Aufgabe 2. Berechnen Sie das Zentrum $Z(D_n)$ der dihedralen Gruppe $D_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \rtimes \{\pm 1\}$ für $n \geq 3$. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $n = 2m$ gerade und $n = 2m+1$ ungerade.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe und $\mathrm{Aut}(G)$ ihre Automorphismengruppe. Zu $a \in G$ betrachten wir die durch Konjugation gegebene Abbildung

$$\gamma_a : G \longrightarrow G, \quad x \longmapsto axa^{-1}.$$

Verifizieren Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die γ_a sind Automorphismen von G.

(ii) Die Abbildung $\gamma : G \to \mathrm{Aut}(G)$, $a \mapsto \gamma_a$ ist ein Homomorphismus.

(iii) Der Kern von γ ist das Zentrum von G.

(iv) Das Bild $\gamma(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$ ist ein Normalteiler.

Aufgabe 4. Wir betrachten die Gruppe $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_3)$.

(i) Welche $d = \mathrm{ord}(A)$, $A \in G$ sind nach dem Satz von Lagrange möglich?

(ii) Welche treten für trigonalisierbare $A \in G$ auf?

(iii) Welche für nicht-trigonalisierbare $B \in G$?

Abgabe: Bis Mittwoch, den 6. Mai um 8:25 Uhr über ILIAS.

Schriftliche Prüfung: Die erste Klausur ist für Samstag, den 18. Juli für 8:30–10:30 geplant. Die Anmeldefrist endet am 11. Juli. Angemeldete Studierende, welche die Zulassungsvoraussetzungen nicht erfüllen, gelten als abgemeldet. Insbesondere Wiederholer, die in der Vergangenheit die Zulassungsvoraussetzung erreicht haben, müssen rechtzeitig sicherstellen, dass in unserer Liste die Anmeldung sowie die Erfüllung der Zulassungsvoraussetzung erfasst wurden.

Mathematisches Institut SS20
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zur Algebra

Blatt 3

Aufgabe 1. Wir betrachten die kanonische Wirkung der Matrizengruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ auf der Menge $X \subset \mathbb{F}_2^{\oplus 2}$ der nicht-trivialen Vektoren. Verifizieren Sie, dass der entsprechende Homomorphismus

$$\mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2) \longrightarrow S_X, \quad A \longmapsto (x \mapsto Ax)$$

bijektiv ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $A \neq E$ trigonalisierbar ist genau dann, wenn die entsprechende Permutation $\sigma \neq e$ eine Transposition ist.

Aufgabe 2. Gegeben sei eine Erweiterung von Gruppen

$$1 \longrightarrow N \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} H \longrightarrow 1.$$

Angenommen, der surjektive Homomorphismus $p : G \to H$ erlaubt einen Schnitt $s : H \to G$. Folgern Sie, dass die kanonischen Abbildung

$$f : N \rtimes_\varphi H \longrightarrow G, \quad (x, a) \longmapsto i(x)s(a)$$

ein Isomorphismus von Gruppen ist. Hierbei ist $\varphi_a(x) = s(a)xs(a)^{-1}$ die Konjugationswirkung.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Wir fassen den Quotienten $X = G/H$ als G-Menge durch die Translationswirkung $a \cdot bH = abH$ auf, und schreiben $f : G \to S_X$ für den entsprechenden Homomorphismus.

(i) Beweisen Sie, dass $N = \mathrm{Ker}(f)$ der größte Normalteiler in G ist, welcher in H enthalten ist.

(ii) Folgern Sie daraus, dass jede Untergruppe H vom Index $[G : H] = 2$ normal sein muss.

Aufgabe 4. Die *projektive spezielle Gruppe* ist der Quotient

$$\mathrm{PSL}_n(K) = \mathrm{SL}_n(K)/N \quad \text{wobei} \quad N = \{\lambda E \mid \lambda^n = 1\}.$$

Zeigen Sie $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_3) \simeq A_4$, indem Sie die Matrizengruppe auf der Menge aller Geraden $L \subset \mathbb{F}_3^{\oplus 2}$ wirken lassen.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 13. Mai um 8:25 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS20

Übungen zur Algebra

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei G eine endliche Gruppe, $H \subset G$ eine p-Gruppe und $H' \subset G$ eine p-Sylow-Gruppe. Argumentieren Sie wie im Beweis der Sylow-Sätze, daß H in einer konjugierten Untergruppe $bH'b^{-1}$ enthalten ist.

Aufgabe 2. Sei $p > 0$ eine Primzahl und $n < p^2$.

(i) Berechnen Sie die Ordnung der p-Sylow-Gruppen $H \subset S_n$.

(ii) Zeigen Sie, dass H elementar-abelsch ist, und geben Sie eine $\mathbb{F}_p$-Basis an.

(iii) Bestimmen Sie die Ordnung der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(H)$.

Aufgabe 3. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{F}_p$-Vektorraum. Konstruieren Sie eine injektive Abbildung $(V_i)_{0 \leq i \leq n} \mapsto H$, welcher jeder *Fahne*

$$0 = V_0 \subsetneqq V_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq V_n = V.$$

von Untervektorräumen eine p-Sylow-Gruppe $H \subset \mathrm{GL}(V)$ zuordnet. Betrachten Sie dann die Anzahl der Fahnen $r \geq 0$ bzw. p-Sylow-Gruppen $s_p = [G : N_G(H)]$ und folgern Sie, dass obige Abbildung bijektiv sein muss.

Aufgabe 4. Sei G eine einfache Gruppe von Ordnung $n = 60$. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Menge $Y = \mathrm{Syl}_5(G)$ besteht aus sechs Elementen.

(ii) Die zur Konjugationswirkung auf Y gehörende Abbildung $G \to S_6$ gibt eine Inklusion $G \subset A_6$.

(iii) Der Bahnenraum A_6/G hat sechs Elemente, und die Nebenklasse eG ist Fixpunkt bezüglich der Translationswirkung.

(iv) Die zur G-Menge $X = A_6/G \smallsetminus \{eG\}$ gehörende Abbildung $G \to S_5$ liefert eine Identifizierung $G = A_5$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 20. Mai um 8:25 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS20

Übungen zur Algebra

Blatt 5

Aufgabe 1. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ zwei Ideale. Verifizieren Sie, dass die folgenden Teilmengen ebenfalls Ideale sind:

(i) $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \{\sum a_i b_i \mid a_i \in \mathfrak{a} \text{ und } b_i \in \mathfrak{b}\}$

(ii) $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \{f \in R \mid f\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\}$

(iii) $\sqrt{\mathfrak{a}} = \{g \in R \mid g^n \in \mathfrak{a} \text{ für ein } n \geq 0\}$

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, $A = K[T]$ der Polynomring, und $R = K[T^2, T^3]$ der Unterring, der aus allen Polynomen $f = \sum \lambda_i T^i$ mit $\lambda_1 = 0$ besteht. Verifizieren Sie, dass R integer ist, aber das Element $f = T^2$ keine Primfaktorzerlegung besitzt.

Aufgabe 3. Sei $R = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zu jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$\mathfrak{m}_a = \{f \in R \mid f(a) = 0\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Der Ring R ist nicht integer.

(ii) Die Teilmengen $\mathfrak{m}_a \subset R$ sind maximale Ideale.

(iii) Gilt $\mathfrak{m}_a = \mathfrak{m}_b$ so müssen die Punkte $a, b \in \mathbb{R}$ übereinstimmen.

(iv) Es gibt maximale Ideale $\mathfrak{m} \subset R$, die nicht von obigen Form sind.

Aufgabe 4. Sei R ein faktorieller Ring und $F = \mathrm{Frac}(R)$ der Körper seiner Brüche. Sei $p \in R$ ein Primelement, $S = R \smallsetminus (p)$ das Komplement des resultierenden Primideals, und

$$S^{-1}R = \left\{ \frac{f}{g} \mid f \in R \text{ und } g \in S \right\} \subset F$$

(i) Verifizieren Sie, dass die Teilmenge $S \subset R$ ein Untermonoid bezüglich der Multiplikation ist.

(ii) Rechnen Sie nach, dass die Teilmenge $S^{-1}R \subset F$ ein Unterring ist.

(iii) Beweisen Sie, dass $S^{-1}R$ ein Hauptidealring ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 27. Mai um 8:25 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS20

Übungen zur Algebra

Blatt 6

Aufgabe 1. Verifizieren Sie die Irreduzibilität der folgenden Polynome:

(i) $f(T) = T^3 + 2T^2 + 4T - 1$ im Ring $\mathbb{F}_5[T]$.

(ii) $g(X,T) = T^m + X^n - 1$ mit Exponenten $m, n \geq 1$ im Ring $\mathbb{Q}[X,T]$.

(iii) $h(T) = T^3 + 662T + 34$ im Ring $\mathbb{Q}[T]$.

(iv) $u(T) = T^{200} - 133T^{17} + 588X^9 + 728$ im Ring $\mathbb{Q}[T]$.

(v) $v(T) = T^p - T + 1$ für Primzahlen $p > 0$ im Ring $\mathbb{Q}[T]$. Nutzen Sie dabei die Kongruenz $v(T+1) \equiv v(T)$ modulo p.

Aufgabe 2. Sei $p > 0$ prim und $d \geq 0$. Wir betrachten den Untervektorraum $V \subset \mathbb{F}_p[T]$ aller Polynome vom Grad $\leq d$, versehen mit dem Ableitungsoperator

$$f : V \longrightarrow V, \quad T^i \longmapsto iT^{i-1}.$$

Bestimmen Sie die invarianten Faktoren $\chi_r \mid \chi_{r-1} \mid \ldots \mid \chi_1$ von (V, f) als Modul über dem Ring $R = \mathbb{F}_p[T]$.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und V ein beliebiger Vektorraum, etwa $K = \mathbb{Q}$ und $V = \mathbb{R}$. Beweisen Sie, daß es eine Basis gibt, indem Sie das Lemma von Zorn auf die geordnete Menge Ψ aller linear unabhängigen Teilmengen in V anwenden.

Aufgabe 4. Klassifizieren Sie die abelschen Gruppen G von Ordnung $n = |G|$ für die Werte

$$624 \leq n \leq 627,$$

indem sie die möglichen invariante Faktoren $n_r \mid n_{r-1} \mid \ldots \mid n_1$ bestimmen.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 3. Juni um 8:25 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS20

Übungen zur Algebra

Blatt 7

Aufgabe 1. Sei K ein Körper, $f = \lambda_2 T^2 + \lambda_1 T + \lambda_0$ ein irreduzibles quadratisches Polynom und $L = K[T]/(f)$ die entsprechende Körpererweiterung. Berechnen Sie zu jedem $a \in L$ die Spur und Determinante der K-linearen Abbildung

$$L \longrightarrow L, \quad x \longmapsto ax.$$

Bestimmen Sie damit das Minimalpolynom von $a \in L$.

Aufgabe 2. (i) Verifizieren Sie, dass das Polynom $f = T^4 + 5T^2 + 2$ aus $\mathbb{Q}[T]$ irreduzibel ist.

(ii) Sei $L = \mathbb{Q}[T]/(f)$ die resultierende Körpererweiterung und $\omega \in L$ die Restklasse der Unbestimmten. Stellen Sie das Produkt

$$(\omega^4 - 4\omega^3 + \omega) \cdot (\omega^2 + 1)$$

als Linearkombination der Basisvektoren ω^i, $0 \leq i \leq 3$ dar.

Aufgabe 3. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ zwei algebraische Zahlen und $f \in \mathbb{Q}[T]$ das Minimalpolynom von $\alpha + \beta$. Wir betrachten die endliche $\mathbb{Q}$-Algebra $A = \mathbb{Q}(\alpha) \otimes \mathbb{Q}(\beta)$ und den $\mathbb{Q}$-linearen Endomorphismus

$$h : A \longrightarrow A, \quad x \longmapsto (\alpha \otimes 1 + 1 \otimes \beta)x.$$

(i) Zeigen Sie, daß $f(T)$ ein Teiler des charakteristischen Polynoms $\chi_h(T)$ ist.

(ii) Folgern Sie daraus die Abschätzung $\deg(\alpha + \beta) \leq \deg(\alpha) \deg(\beta)$.

(iii) Berechne Sie damit das Minimalpolynom der Summe $\sqrt{2} + e^{2\pi i/3}$.

Aufgabe 4. Sei $K \subset E$ eine algebraische Körpererweiterung. Beweisen Sie, dass jeder Homomorphism $\varphi : E \to E$ von K-Algebren bijektiv sein muss.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 10. Juni um 8:25 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS20

Übungen zur Algebra

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei $K = \mathbb{R} \cap \mathbb{Q}^{\text{alg}}$ der Körper der reellen algebraischen Zahlen. Beweisen Sie, dass für jede endliche Erweiterung $L = K(\alpha)$ mit $\alpha \notin K$ der Grad $n = [L : K]$ eine gerade Zahl ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass der Körper $\mathbb{C}$ unendlich viele algebraisch abgeschlossenen Unterkörper enthält.

Aufgabe 3. Wir betrachten den endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ zur Primzahlpotenz $q = p^n$.

(i) Für welche Exponenten n gibt es genau vier Unterkörper $K \subset \mathbb{F}_q$?

(ii) Für welche n ist die Menge der Unterkörper $L \subset \mathbb{F}_q$ total geordnet?

Aufgabe 4. Sei $K \subset \mathbb{R}$ ein Unterkörper. Angenommen, der Punkt $z = (\omega_1, \omega_2)$ aus $\mathbb{R}^2$ geht durch eine elementare ZL-Konstruktion mit zwei Kreisen aus Punkten mit Koordinaten in K hervor. Rechnen Sie explizit nach, dass

$$[K(\omega_1, \omega_2) : K] = 2^\nu$$

für $\nu = 1$ oder $\nu = 0$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 17. Juni um 8:25 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zur Algebra

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei K ein Körper. Wir rechnen hier in der Erweiterung $E = K(\omega_1, \omega_2)$, wobei ω_1, ω_2 zwei Unbestimmte sind, und setzen $\omega_3 = -(\omega_1 + \omega_2)$. Seien $r, s \in E$ die Koeffizienten des Polynoms

$$f = (T - \omega_1)(T - \omega_2)(T - \omega_3) = T^3 + rT + s.$$

Verifizieren Sie durch explizites Nachrechnen die Gleichheit

$$(\omega_1 - \omega_2)^2(\omega_1 - \omega_3)^2(\omega_2 - \omega_3)^2 = -(4r^3 + 27s^2)$$

für die Diskriminante $\mathrm{dis}(f) \in E$.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$ eine Matrix, und

$$L = K[A] \subset \mathrm{Mat}_n(K)$$

die von A erzeugte K-Algebra. Angenommen, es gibt keinen A-invarianten Unterraum $0 \subsetneq U \subsetneq K^n$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Der Ring L ist ein Körper, vom Grad $[L : K] = n$.

(ii) Die Erweiterung $K \subset L$ ist separabel genau dann, wenn die Matrix A halbeinfach ist, also über $\Omega = K^{\mathrm{alg}}$ diagonalisierbar wird.

Aufgabe 3. Sei $\omega \in \mathbb{C}$ eine algebraische Zahl, und $E = \mathbb{Q}(\alpha)$ die entsprechende Erweiterung.

(i) Angenommen, $\mathbb{Q} \subset E$ ist normal. Verifizieren Sie, dass die komplexe Konjugation $\overline{x + iy} = x - iy$ einen $\mathbb{Q}$-Homomorphismus $\sigma : E \to E$ induziert.

(ii) Geben Sie ein Beispiel $E = \mathbb{Q}(\alpha)$ an, bei dem dies nicht der Fall ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper von Charakteristik $p > 0$, aufgefasst als Erweiterung des Primkörpers $\mathbb{F}_p$.

(i) Verifizieren Sie, dass die *Frobenius-Abbildung*

$$F : K \longrightarrow K, \quad x \longmapsto x^p$$

eine $\mathbb{F}_p$-Homomorphismus ist.

(ii) Angenommen, der Frobenius $F : K \to K$ ist surjektiv. Beweisen Sie, dass jede algebraische Erweiterung $K \subset E$ separabel ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 24. Juni um 8:25 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS20

Übungen zur Algebra

Blatt 10

Aufgabe 1. Sei $\mathbb{Q} \subset E$ der Zerfällungskörper eines irreduzibles Polynoms $f \in \mathbb{Q}[T]$ vom Grad $\deg(f) = 3$, das eine komplexe Wurzel $\omega \in \mathbb{C}$ hat, also $\mathrm{Im}(\omega) \neq 0$. Bestimmen Sie mit der Galois-Korrespondenz die Anzahl der Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subset L \subset E$.

Aufgabe 2. Sei $K \subset E$ der Zerfällungskörper zu einem Polynom $f = T^n - \alpha$ mit $\alpha, n \in K^\times$, und $K \subset L$ der Zerfällungskörper zu $g = T^n - 1$, aufgefasst als Zwischenkörper. Verifizieren Sie, dass der Homomorphismus

$$\mathrm{Gal}(L/K) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mu_n(L)), \quad \sigma \longmapsto (\xi \mapsto \sigma(\xi))$$

injektiv ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die Abbildungen

$$\mathrm{Gal}(E/L) \longrightarrow \mu_n(L), \quad \sigma \longmapsto \sigma(\sqrt[n]{\alpha})/\sqrt[n]{\alpha}$$

ein injektiver Homomorphismus ist, der nicht von der Wahl der Wurzel $\sqrt[n]{\alpha}$ abhängt.

Aufgabe 3. Sei $K \subset E$ eine Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}(E/K)$. Rechnen Sie nach, dass

$$\mathrm{Gal}(E/\sigma(L)) = \sigma\,\mathrm{Gal}(E/L)\sigma^{-1}$$

für jeden Zwischenkörper L und jedes $\sigma \in G$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $K \subset E$ eine Galois-Erweiterung vom Grad $[E : K] = p^n$, für eine Primzahl $p > 0$. Zeigen Sie mit der Galois-Korrespondenz, dass es eine Folge von Unterkörpern

$$K = L_0 \subset L_1 \subset \ldots \subset L_n = E$$

mit $[L_i : K] = p^i$ gibt.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 1. Juli um 8:25 Uhr über ILIAS.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS20

Übungen zur Algebra

Blatt 11

Aufgabe 1. Seien p, q, r paarweise verschiedene Primzahlen. Zeigen Sie, dass jede Gruppe G von Ordnung $n = pqr$ auflösbar ist.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe, und $D(G)$ die von den Kommutatoren

$$[x, y] = xyx^{-1}y^{-1} \in G$$

erzeugte Untergruppe, wobei x, y über alle Gruppenelemente verläuft. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Untergruppe $D(G) \subset G$ ist normal.

(ii) Die Restklassengruppe $G^{\mathrm{ab}} = G/D(G)$ ist abelsch.

(iii) Die Gruppe G ist auflösbar genau dann, wenn $D(G)$ auflösbar ist.

(vi) Für die symmetrische Gruppe gilt $D(S_n) = A_n$.

Aufgabe 3. Sei $p > 0$ eine Primzahl und $r \geq 1$. Zeigen Sie, dass die endliche Erweiterung $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_{p^r}$ galoisch ist, mit Galois-Gruppe

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^r}/\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}.$$

Aufgabe 4. Nach dem Zwischenwertsatz bzw. der Darstelllung mit Polarkoordinaten haben die Körper $K = \mathbb{R}$ und $L = \mathbb{C}$ die folgenden Eigenschaften: Der Erweiterungsgrad ist $[L : K] = 2$, und es gibt keine $K \subset K'$ oder $L \subset L'$ mit

$$[K' : K] = 2n + 3 \quad \text{und} \quad [L' : L] = 2.$$

Zeigen Sie für derartige Körper $K \subset L$ in Charakteristik $p = 0$, dass L algebraisch abgeschlossen sein muss. Argumentieren Sie wie folgt:

(i) Wäre $L \subsetneqq L^{\mathrm{alg}}$, so gibt eine endliche Erweiterung $L \subsetneqq E$.

(ii) Ein derartiges E lässt sich so wählen, dass $K \subset E$ galoisch ist.

(iii) Aus den Sylow-Sätzen und der Galois-Korrespondenz folgt, dass $G = \mathrm{Gal}(E/K)$ eine 2-Gruppe ist.

(iv) Daraus ergibt sich eine quadratische Erweiterung $L \subset L'$, Widerspruch!

Abgabe: Bis Mittwoch, den 8. Juli um 8:25 Uhr über ILIAS.

Klausurzulassung: Aufgrund der besonderen Umstände im Corona-Semester wird das Quorum auf $80 = 10 \cdot 20 \cdot 0,4$ Punkte abgesenkt.