Mathematisches Institut
Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 20

Klausur zur Vorlesung Algebra

Erste Klausur am 18. Juli 2020

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

Platznummer:

- Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.
- Anderes mitgebrachte Papier, Bücher oder elektronische Geräte bleiben während der gesamten Prüfung verstaut.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis sichtbar aus und tragen Sie oben Ihre Daten ein.
- Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie Ihre Antworten, pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

1	2	3	4	5	Summe	Note

Aufgabe 1. Sei G eine endliche Gruppe, $p > 0$ eine Primzahl, und $N \subset G$ die Untergruppe, welche von einer p-Sylow-Gruppe $H \subset G$ sowie den Kommutatoren $[y, z]$ mit $y, z \in G$ erzeugt wird. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Untergruppe $N \subset G$ ist normal.

(ii) Die Restklassengruppe G/N ist abelsch, und ihre Ordnung ist prim zu p.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Teilmenge $V \subset S_4$, welche aus

$$\eta_1 = (12)(34) \quad \text{und} \quad \eta_2 = (13)(24) \quad \text{und} \quad \eta_3 = (14)(23)$$

sowie dem neutralen Element besteht. Zeigen Sie, dass die Teilmenge $V \subset A_4$ eine 2-Sylow-Gruppe ist, welche normal und elementar-abelsch ist. Fassen Sie nun V als $\mathbb{F}_2$-Vektorraum auf, wählen Sie eine Basis, und beschreiben Sie die Konjugationswirkung

$$V \longrightarrow V, \quad x \longmapsto \sigma x \sigma^{-1}$$

der Permutation $\sigma = (1234)$ durch eine invertierbare Matrix.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $g \in K[T]$ ein Polynom vom Grad $d \geq 0$. Wir betrachten den Unterring

$$A = \{\frac{f}{g^n} \mid f \in K[T] \text{ und } n \geq 0\}$$

in $K(T)$. Zeigen Sie, dass A ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 4. Sei $d \geq 2$ eine natürliche Zahl, welche ein Produkt von paarweise verschiedenen Primzahlen ist. Wir betrachten den Körper

$$L = \mathbb{Q}(\sqrt[7]{d}) \subset \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass die $\mathbb{Q} \subset L$ eine separable, nicht-normale Erweiterung vom Grad $n = 7$ ist.

Aufgabe 5. Sei K ein Körper und $K \subset E$ eine endliche Galois-Erweiterung, deren Galois-Gruppe isomorph zur dihedralen Gruppe $D_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \rtimes \{\pm 1\}$ ist. Seien

$$K \subset L_i \subset E, \quad 1 \leq i \leq r$$

die Zwischenkörper vom Grad $[L_i : K] = 5$.

(i) Bestimmen Sie die deren Anzahl $r \geq 0$.

(ii) Zeigen Sie, dass die $K \subset L_i$ nicht normal sind.