Mathematisches Institut
Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 20

Klausur zur Vorlesung Algebra

Zweite Klausur am 2. Oktober 2020

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:
Studiengang:
Platznummer:

- Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.
- Anderes mitgebrachte Papier, Bücher oder elektronische Geräte bleiben während der gesamten Prüfung verstaut.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis sichtbar aus und tragen Sie oben Ihre Daten ein.
- Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie Ihre Antworten, pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

1	2	3	4	5	Summe	Note

Aufgabe 1. Sei N eine abelsche Gruppe, welche wir multiplikative notieren.

(i) Verifizieren Sie, dass $x \mapsto x^{-1}$ ein Automorphismus von N ist, und dass

$$\varphi : \{\pm 1\} \longrightarrow \mathrm{Aut}(N), \quad \epsilon \longmapsto (x \mapsto x^{\epsilon})$$

ein Homomorphismus von Gruppen ist.

(iii) Bestimmen Sie zur Gruppe $G = N \rtimes_{\varphi} \{\pm 1\}$ das Zentrum $Z(G)$.

Aufgabe 2. Sei $p > 0$ eine Primzahl und $n = 2p - 1$.

(i) Geben Sie zwei p-Sylow-Gruppen $H' \neq H''$ in der Gruppe S_n an.

(ii) Finden Sie ein explizites Element $\sigma \in S_n$ mit $\sigma H' \sigma^{-1} = H''$.

(iii) Zeigen Sie, dass die Anzahl s_p der p-Sylow-Gruppen $H \subset S_n$ ein Teiler von $(2p-1)!/(p-1)!$ ist.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper und $n \geq 2$. Wir betrachten die Teilmenge $R \subset K[T]$ aller Polynome $f = \sum \lambda_i T^i$ mit $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$. Zeigen Sie, dass R ein Unterring ist, welcher integer aber nicht faktoriell ist.

Aufgabe 4. Sei $p > 0$ eine Primzahl, und $K = \mathbb{F}_p(X)$ der rationale Funktionenkörper in der Unbestimmten X. Wir betrachten die endliche Erweiterung

$$L = K(\sqrt[5]{X}).$$

Zeigen Sie, dass diese für $p \neq 5$ separabel ist und für $p = 11$ sogar galoisch wird.

Aufgabe 5. Sei $K \subset L$ eine Galois-Erweiterung mit Galois-Gruppe $G = A_4$, und

$$K \subset E_i \subset L, \quad 1 \leq i \leq r$$

die Zwischenkörper. Bestimmen Sie deren Anzahl $r \geq 1$ und die auftretenden Grade $d_i = [E_i : K]$.