Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 1

Aufgabe 1. Seien $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ zwei Ideale in einem Ring R. Angenommen, keins der beiden ist in dem anderen enthalten. Verifizieren Sie, dass weder $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ noch $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ prim sein können.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $\mathfrak{m}_\lambda$, $\lambda \in L$ die Familie der maximalen Ideale. Beweisen Sie, dass die Einheitengruppe $R^\times$ das Komplement der Vereinigungsmenge $\bigcup_{\lambda \in L} \mathfrak{m}_\lambda$ ist.

Aufgabe 3. Seien $A = R_1 \times R_2$ das Produkt von zwei Ringen. Zeigen Sie, dass jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ von der Form $\mathfrak{p}_1 \times R_2$ oder $R_1 \times \mathfrak{p}_2$ mit einem Primideal $\mathfrak{p}_1 \subset R_1$ beziehungsweise $\mathfrak{p}_2 \subset R_2$ ist. Folgern Sie daraus, dass die Menge $\operatorname{Spec}(A)$ die disjunkte Vereinigung $\operatorname{Spec}(R_1) \cup \operatorname{Spec}(R_2)$ ist.

Aufgabe 4. Sei $R \subset A$ eine Ringerweiterung. Wir betrachten den R-Modul A/R. Das *Annulatorideal*

$$\mathfrak{c} = \operatorname{Ann}_R(A/R) = \{f \in R \mid f \cdot A/R = 0\}$$

wird auch als *Konduktorideal* bezeichnet. Zeigen Sie folgende Eigenschaften:

(i) Die Teilmenge $\mathfrak{c} \subset R$ ist ein Ideal im Ring R.

(ii) Aufgefasst als Teilmenge in A ist $\mathfrak{c}$ auch ein Ideal im Ring A.

(iii) Das Konduktorideal ist das größte Ideal in R, dass zugleich Ideal in A ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 23. April um 23:59 Uhr über ILIAS.

Die Lösungen müssen handschriftlich und individuell sein und in Form einer einzigen pdf-Datei vorliegen, mit der Bezeichnung `NameVorname--Abgabe01.pdf` beim ersten Blatt. Die Aufgaben werden in den Übungsgruppen vor- und nachbesprochen. Es gibt keine Korrekturen, daher werden auch keine Punkte vergeben.

Quorum: Um zur mündlichen Prüfung zugelassen zu werden, müssen sie insgesamt 8 mathematisch sinnvolle Abgaben gemacht haben.