Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2021

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 2

Aufgabe 1. Beschreiben Sie das Spektrum $X = \operatorname{Spec}\mathbb{R}[T]$ als topologischen Raum durch Konjugationsklassen $\{z, \bar{z}\}$ komplexer Zahlen, und geben Sie zu jedem Punkt $x \in X$ den Restekörper $\kappa(x)$ an.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subset R$ zwei Ideale.

(i) Verifizieren Sie die Gleichheit beziehungsweise die Inklusion

$$\sqrt{\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}} \cap \sqrt{\mathfrak{b}} \quad \text{und} \quad \sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} \supset \sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}.$$

(ii) Geben Sie in dem faktoriellen Ring $R = \mathbb{C}[x, y]$ zwei Hauptideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ an mit der Eigenschaft $\sqrt{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}} \neq \sqrt{\mathfrak{a}} + \sqrt{\mathfrak{b}}$.

Aufgabe 3. Sei k ein Körper und $R = k[T_1, T_2, \ldots]$ der Polynomring in unendlich vielen Unbestimmten. Sei $X = \operatorname{Spec}(R)$, und $a \in X$ der abgeschlossene Punkt zum maximalen Ideal $\mathfrak{m} = (T_1, T_2, \ldots)$. Zeigen Sie, dass die komplementäre offenen Menge

$$U = D(T_1) \cup D(T_2) \cup \ldots$$

nicht quasikompakt ist.

Aufgabe 4. Sei X ein kompakter topologischer Raum und $\mathscr{C}(X)$ der Ring der stetigen Funktionen. Beweisen Sie, dass jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset \mathscr{C}(X)$ in genau einem maximalen Ideal enthalten ist. Leiten Sie dafür aus der Annahme $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}_a \cap \mathfrak{m}_b$ mit $a \neq b$ aus X einen Widerspruch her, indem Sie mithilfe der Formel

$$\max(|f| - |g|, 0) \cdot \min(|f| - |g|, 0) = 0,$$

deduzieren, dass auch das Ideal $\mathfrak{m}_a \cap \mathfrak{m}_b$ prim sein muss. Skizzieren Sie den topologischen Raum $\operatorname{Spec}\mathscr{C}(X)$.

Abgabe: Bis Freitag, den 30. April um 23:59 Uhr über ILIAS.