Mathematisches Institut SS 2021
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei R ein Ring und $e \in R$ ein *idempotentes Element*, das heißt $e^2 = e$. Wir betrachten das multiplikative System $S = \{e^n \mid n \geq 0\}$ und das Hauptideal $\mathfrak{a} = (1 - e)$.

(i) Rechnen Sie nach, dass $e' = 1 - e$ ebenfalls idempotent ist, mit $e \cdot e' = 0$.

(ii) Verifizieren Sie, dass im topologischen Raum $X = \operatorname{Spec}(R)$ die offenen Menge $U = D(e)$ mit der abgeschlossenen Menge $Z = V(e')$ übereinstimmt.

(iii) Definieren Sie zueinander inverse Abbildungen

$$S^{-1}R \longrightarrow R/\mathfrak{a} \quad \text{und} \quad R/\mathfrak{a} \longrightarrow S^{-1}R,$$

indem Sie die universelle Eigenschaft der Lokalisierung beziehungsweise des Restklassenrings ausnutzen.

Aufgabe 2. Wir betrachten die zyklische Gruppe $M = \mathbb{Z}/63\mathbb{Z}$ als Modul über dem Ring $R = \mathbb{Z}$. Berechenen Sie für jede Primzahl $\ell > 0$ die Lokalisierung

$$M_\ell = \{\frac{a}{\ell^n} \mid a \in M \text{ und } n \geq 0\}.$$

Schreiben Sie dazu M als Summe von zyklischen p-Gruppen.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, $S \subset R$ ein multiplikatives System, und $\mathfrak{p}_\lambda \subset R$, $\lambda \in L$ die Familie aller zu S disjunkten Primideale.

(i) Verifizieren Sie, dass die Teilmenge

$$\tilde{S} = \{f \in R \mid f \notin \mathfrak{p}_\lambda \text{ für alle } \lambda \in L\}$$

ein multiplikatives System in R ist, welches S enthält.

(ii) Zeigen Sie, dass die resultierende kanonische Abbildung

$$S^{-1}R \longrightarrow \tilde{S}^{-1}R, \quad a/f \longmapsto a/f$$

bijektiv ist.

Aufgabe 4. Seien $f_1, \ldots, f_r \in R$ endlich viele Ringelemente und $S \subset R$ das davon erzeugte multiplikative System. Zeigen Sie, dass die R-Algebra $A = S^{-1}R$ vom endlichen Typ ist, und tatsächlich als Restklassenring des Polynomrings $R[T]$ geschrieben werden kann.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 3. Juni um 23:59 Uhr über ILIAS.