

Übungen zu Lineare Algebra I

Blatt 1

Aufgabe 1. Für welche $t \in \mathbb{R}$ hat die quadratische Gleichung

$$X^2 + tX + 2t - 3 = 0$$

eine reelle Lösung? Wann gibt es genau eine solche Lösung?

Aufgabe 2. Beweisen Sie durch Widerspruch, dass die ganze Zahl $p = 3$ keine Quadrat in \mathbb{Q} ist, analog zur Vorlesung.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass das Lösen von algebraischen Gleichungen

$$X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 = 0$$

vom Grad $n \geq 1$ durch eine *Tschirnhaus-Transformation* $X = Y - a_{n-1}/n$ auf das Lösen von Gleichungen der Form

$$Y^n + b_{n-2}Y^{n-2} + \dots + b_1Y + b_0 = 0$$

reduziert wird, in Analogie zum Spezialfall von quadratischen Gleichungen.

Aufgabe 4. Seien a, b, a', b' vier Dinge. Verifizieren Sie, dass die Gleichheit

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$$

von Mengen genau dann gilt, wenn $a = a'$ und $b = b'$. Tipp: Unterscheiden Sie die Fälle $a = b$ und $a \neq b$.

Abgabe: Bis Montag, den 23. Oktober um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Hinweis zur gesamten Lehrveranstaltung: Bild- und Tonaufnahmen sowie die unautorisierte Verbreitung von Vorlesungsmitschriften insbesondere im Internet sind aus urheberrechtlichen und didaktischen Gründen nicht gestattet.

Hinweise zum Bearbeiten der Übungsaufgaben:

1. Beschäftigen Sie sich bereits *ab dem Ausgabetag* mit den Übungsaufgaben.
2. Schlagen Sie in Ihrer Vorlesungsmitschrift sowie einem Lehrbuch die exakte Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe nach. Verdeutlichen Sie sich die Aussagen durch *Beispiele* und *Spezialfälle*.
3. *Diskutieren* Sie mit Ihren Kommilitonen über die Aufgaben. Es ist eine vorzügliche Idee, kleine Arbeitsgruppen zur Bearbeitung der Aufgaben zu bilden.
4. Schreiben Sie Ihre Lösungen in *korrekten und vollständigen deutschen Sätzen* auf! Die Verwendung von logischen Symbolen wie $\forall, \exists, \Leftrightarrow$ ist im Fließtext grundsätzlich unzulässig! In abgesetzten Formel sind diese erlaubt.
5. Wenn Sie eine Gleichheit $X = Y$ von Mengen zeigen wollen, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Inklusion $X \subset Y$ und $Y \subset X$ verifizieren.
6. Wollen Sie beweisen, dass „ A genau dann gilt, wenn B gilt“, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Implikation „wenn A , dann B “ sowie „wenn B , dann A “ zeigen! (Ersteres besagt, dass B *notwendig* für A ist, während Letzteres bedeutet, dass B *hinreichend* für A ist.)
7. Die Aussage „wenn A , dann B “ ist äquivalent zur Aussage „wenn B nicht gilt, dann gilt A nicht“.
8. Wollen Sie zeigen, dass eine Aussage falsch ist, reicht es, ein *einziges Gegenbeispiel* anzugeben! Aus Bequemlichkeit wähle man dieses so einfach wie möglich.
9. Wenn Sie Resultate *aus der Vorlesung zitieren* wollen, schreiben Sie beispielsweise: „Wegen Vorlesung, Proposition 3.12 gilt...“
10. Alle Abgaben müssen *handschriftlich*, individuell, und ohne elektronische Hilfsmittel verfasst sein.
11. Verwenden Sie *Deckblatt* und *Heftklammern* für Ihre Abgaben!

Die Korrektoren sind angewiesen, bei Nichtbeachtung von Hinweis 4 pro Aufgabe einen Punkt abzuziehen.