Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 1

Aufgabe 1. Zeigen Sie zunächst mit der Regel von Sarrus, und dann nocheinmal mit der Laplace-Entwicklung, dass die Begleitmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom $\chi_C(T) = T^3 + \alpha_2 T^2 + \alpha_1 T + \alpha_0$ hat.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass 2×2-Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad J = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 1 & \eta \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \neq \mu$ ähnlich zu einer Begleitmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_0 \\ 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}$$

sind. Drücken Sie weiterhin $\alpha_0, \alpha_1 \in k$ durch die Matrixeinträge $\lambda \neq \mu$ beziehungsweise η aus.

Aufgabe 3. Seien $m, n \geq 0$ und $d = \min(m, n)$. Wir betrachten auf $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ die Relation

$$A \sim A' \iff A' = SAR \text{ mit } S \in \mathrm{GL}_m(K),\ R \in \mathrm{GL}_n(K).$$

Verifizieren Sie, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, und dass

$$\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)/\!\sim\ \longrightarrow \{0, 1, \ldots, d\}, \quad [A] \longmapsto \mathrm{rank}(A)$$

wohldefiniert und bijektiv ist.

Aufgabe 4. Sei $X = \{a, b, c, d\}$ eine vier-elementige Menge. Wieviele Äquivalenzrelationen $R \subset X \times X$ gibt es?

Abgabe: Bis Donnerstag, den 18. April um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Klausurtermine: Dienstag, der 25. Juli und Montag, der 30. September.

Hinweis zur gesamten Lehrveranstaltung: Bild- und Tonaufnahmen sowie die unautorisierte Verbreitung von Vorlesungsmitschriften insbesondere im Internet sind aus urheberrechtlichen und didaktischen Gründen nicht gestattet.

Hinweise zum Bearbeiten der Übungsaufgaben:

1. Beschäftigen Sie sich bereits *ab dem Ausgabetag* mit den Übungsaufgaben.
2. Schlagen Sie in Ihrer Vorlesungsmitschrift sowie einem Lehrbuch die exakte Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe nach. Verdeutlichen Sie sich die Aussagen durch *Beispiele* und *Spezialfälle*.
3. *Diskutieren* Sie mit Ihren Kommilitonen über die Aufgaben. Es ist eine vorzügliche Idee, kleine Arbeitsgruppen zur Bearbeitung der Aufgaben zu bilden.
4. Schreiben Sie Ihre Lösungen in *korrekten und vollständigen deutschen Sätzen* auf! Die Verwendung von logischen Symbolen wie $\forall, \exists, \Leftrightarrow$ ist im Fließtext grundsätzlich unzulässig! In abgesetzten Formel sind diese erlaubt.
5. Wenn Sie eine Gleichheit $X = Y$ von Mengen zeigen wollen, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Inklusion $X \subset Y$ und $Y \subset X$ verifizieren.
6. Wollen Sie beweisen, dass „A genau dann gilt, wenn B gilt", müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Implikation „wenn A, dann B" sowie „wenn B, dann A" zeigen! (Ersteres besagt, dass B *notwendig* für A ist, während Letzteres bedeutet, dass B *hinreichend* für A ist.)
7. Die Aussage „wenn A, dann B" ist äquivalent zur Aussage „wenn B nicht gilt, dann gilt A nicht".
8. Wollen Sie zeigen, dass eine Aussage falsch ist, reicht es, ein *einziges Gegenbeispiel* anzugeben! Aus Bequemlichkeit wähle man dieses so einfach wie möglich.
9. Wenn Sie Resultate *aus der Vorlesung zitieren* wollen, schreiben Sie beispielsweise: „Wegen Vorlesung, Proposition 3.12 gilt..."
10. Alle Abgaben müssen *handschriftlich*, individuell, und ohne elektronische Hilfsmittel verfasst sein.
11. Verwenden Sie *Deckblatt* und *Heftklammern* für Ihre Abgaben!

Die Korrektoren sind angewiesen, bei Nichtbeachtung von Hinweis 4 pro Aufgabe einen Punkt abzuziehen.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei $f : V \to V$ ein Endomorphismus, für den jeder Untervektorraum $U \subset V$ invariant ist. Folgern Sie, dass f eine Homothetie ist, also $f = \lambda\,\mathrm{id}_V$ für ein Skalar $\lambda \in K$.

Aufgabe 2. Sei A eine reelle 2×2-Matrix mit

$$\mathrm{tr}(A)^2 > 4\det(A).$$

Zeigen Sie, dass es genau vier A-invariante Unterräume $U \subset \mathbb{R}^2$ gibt.

Aufgabe 3. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und $f, g : V \to V$ zwei kommutierende Endomorphismen, also

$$f \circ g = g \circ f.$$

Zeigen Sie, dass jeder Eigenraum von f ein invarianter Unterraum für g ist. Folgern Sie, dass g diagonalisierbar ist, falls $|\sigma(f)| = n$ gilt.

Aufgabe 4. Sei $p > 0$ eine Primzahl. Wieviele von den p^2 Begleitmatrizen

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_0 \\ 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_p)$$

sind trigonalisierbar? Wieviele sind sogar diagonalisierbar?

Abgabe: Bis Donnerstag, den 25. April um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 3

Aufgabe 1. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ Matrizen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Ist A trigonalisierbar, so auch die Transponierte ${}^tA$.

(ii) Sind A, B trigonalisierbar, so auch die Summe $A + B$.

(iii) Sind A, B trigonalisierbar, so auch das Produkt AB.

(iv) Ist A trigonalisierbar und invertierbar, so auch das Inverse A^{-1}.

Aufgabe 2. Sei $V = \mathrm{Mat}_2(K)$ und $C = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ eine obere Dreiecksmatrix mit Determinante $\det(C) = 1$. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad A \longmapsto CAC^{-1}.$$

Zeigen Sie, dass f trigonalisierbar ist.

Aufgabe 3. (i) Zeigen Sie, dass es zu jedem $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ einen invarianten Unterraum $U \subset \mathbb{R}^3$ von Dimension $n = 1$ gibt.

(ii) Konstruieren Sie ein $B \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$, für das $U = 0$ und $U = \mathbb{Q}^3$ die einzigen invarianten Unterräume sind.

Tipp: Betrachten Sie die charakteristischen Polynome und ihre Faktorisierungen.

Aufgabe 4. Seien $U, U' \subset V$ zwei Untervektorräume eines Vektorraumes. Benutzen Sie den Isomorphiesatz, um eine Identifizierung

$$U/(U \cap U') = (U + U')/U'$$

von Quotientenvektorräumen zu erhalten. Folgern Sie daraus für endlichdimensionale Vektorräume die Dimensionsformel

$$\dim(U + U') = \dim(U) + \dim(U') - \dim(U \cap U').$$

Abgabe: Bis Donnerstag, den 2. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, $f : V \to V$ nilpotent, und

$$A = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_r} \end{pmatrix}, \quad n_1 \geq \ldots \geq n_r$$

seine Jordan-Normalform. Drücken Sie die Anzahl $r \geq 0$ der Blöcke durch den Rang von f aus.

Aufgabe 2. (i) Bestimmen Sie die möglichen Jordan-Normalformen für nilpotente $n \times n$-Matrizen für die Zahl $n = 6$.

(ii) Sei $V \subset \mathbb{F}_3[T]$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad $\deg(P) \leqslant 5$. Was ist die Jordan-Normalform der Ableitungsoperators $V \to V$, $P \mapsto P'$?

Aufgabe 3. Seien A_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$ die fünf möglichen Jordan-Normalformen für nilpotenten Matrizen $B \in \mathrm{Mat}_4(K)$. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi : \{A_1, \ldots, A_5\} \longrightarrow \{A_1, \ldots, A_5\},$$

welche $A = A_i$ auf die Jordan-Normalform von $B = A^2$ abbildet. Stellen Sie zu dieser Abbildung die Wertetabelle auf.

Aufgabe 4. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$ nilpotent ist, beträgt $\nu(n,p)/p^{n^2}$, wobei $\nu(n,p) \geq 1$ die Anzahl der nilpotenten Matrizen $N \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$ ist. Bestimmen Sie $\nu(2,p)$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 8. Mai um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

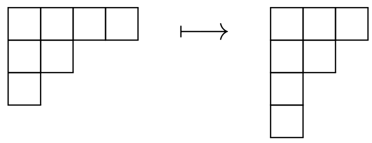
Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 5

Aufgabe 1. Spiegelt man ein Young-Diagramm Y entlang der Diagonale, erhält man das *transponierte Young-Diagramm* Y^*, zum Beispiel:



Geben Sie für $n = 7$ die entsprechende Abbildung $A \mapsto A^*$ für die fünfzehn Jordan-Normalformen von nilpotenten $n \times n$-Matrizen an.

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$ eine nilpotente Matrix, und

$$U = \{B \in \mathrm{Mat}_2(K) \mid AB = BA\}$$

ihr *Kommutator*. Verifizieren Sie, dass $U \subset \mathrm{Mat}_2(K)$ ein Untervektorraum ist, und bestimmen sie dessen Dimension in Abhängigkeit zur Jordan-Normalform von A.

Aufgabe 3. Sei $Z \subset \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ der Kegel der nilpotenten Matrizen. Zeigen Sie, dass dies eine *abgeschlossene Menge* ist, und das Komplement U eine *offene Menge* ist. Mit anderen Worten: Zu jedem $(\alpha_{ij}) \in U$ gibt es ein reelles $\epsilon > 0$ so, dass $(\beta_{ij}) \in U$ sofern die Matrixeinträge $|\alpha_{ij} - \beta_{ij}| < \epsilon$ erfüllen.

Aufgabe 4. Sei $f : V \to V$ trigonalisierbar. Beweisen Sie, dass f genau dann diagonalisierbar ist, wenn es zu jedem invarianten Unterraum $U \subset V$ ein invariantes Komplement gibt.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 16. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 6

Aufgabe 1. Bestimmen Sie die Jordan-Normalform zur Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{F}_3).$$

Tipp: Berechnen Sie für gewisse $(B - \lambda E)^i$ mit dem Gauß-Algorithmus den Rang.

Aufgabe 2. Sei $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ eine reelle Matrix, die über $K = \mathbb{R}$ nicht trigonalisierbar ist, und $\sigma(A) \subset \mathbb{C}$ das Spektrum der komplexen Eigenwerte.

(i) Zeigen Sie, dass $\sigma(A) = \{x, z, \bar{z}\}$ für eine relle Zahl x und konjugiert-komplexe Zahlen $z \neq \overline{z}$.

(ii) Folgern Sie, dass A über $L = \mathbb{C}$ diagonalisierbar sein muss.

Aufgabe 3. Sei $p > 0$ eine Primzahl. Geben Sie für $n = 4$ eine Formel für die Anzahl $m \geq 0$ der Ähnlichkeitsklassen von trigonalisierbaren $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$ an.

Aufgabe 4. Sei $B = (\lambda_{ij})$ eine nilpotente $n \times n$-Matrix mit Einträgen $\lambda_{ij} \in \mathbb{Z}$. Für eine Primzahl $p > 0$ bezeichne $B_p = ([\lambda_{ij}])$ die Matrix der Kongruenzklassen modulo p. Beweisen Sie, dass für fast alle p die Jordan-Normalform von $B_p \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$ mit der Jordan–Normalform von $B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q})$ übereinstimmt.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 23. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 7

Aufgabe 1. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_2(K)$ zwei nilpotente Matrizen, deren Produkt AB ebenfalls nilpotent ist. Folgern Sie, dass $AB = 0$ gelten muss.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring, der Unterring eines Körpers ist, zum Beispiel der Polynomring $R = K[T]$. Sei $\mathfrak{a} \subset R$ ein Hauptideal und $f, g \in \mathfrak{a}$ zwei Erzeuger. Zeigen Sie, dass $f = ug$ für ein $u \in R^\times$.

Aufgabe 3. Sei $f : V \to V$ eine Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums, $U \subset V$ ein invarianter Untervektorraum, und

$$\bar{f} : V/U \to V/U$$

der induzierte Endomorphismus auf dem Quotientenvektorraum.

(i) Verifizieren Sie, dass die Minimalpolynome $\mu_{f|U}(T)$ und $\mu_{\bar{f}}(T)$ Teiler von $\mu_f(T)$ sind.

(ii) Folgern Sie, dass $f|U$ und $\bar{f}$ diagonalisierbar sind, falls der Endomorphismus f diagonalisierbar ist.

Aufgabe 4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Beweisen Sie, dass der Grad des Minimalpolynoms $\mu_A(T)$ mit der Vektorraumdimension des Bildes der linearen Abbildung

$$K[T] \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(K), \quad P(T) \longmapsto P(A)$$

übereinstimmt.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 29. Mai um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 8

Aufgabe 1. Wie ändert sich das charakteristische Polynom $\chi_A(T) \in K[T]$, wenn man $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$ durch eine kongruente Matrix

$$B = {}^tSAS, \quad S \in \mathrm{GL}_2(K)$$

ersetzt?

Aufgabe 2. Sei $V \subset K[T]$ der Vektorraum aller Polynome $P(T)$ vom Grad $\deg(P) \leqslant 4$, und $\varphi \in V^*$ die durch

$$\varphi(P) = P'(-2).$$

gegebene Linearform, wobei $P'(T)$ die formale Ableitung ist. Stellen Sie φ als Linearkombination der dualen Basis Q_i^* zur Standardbasis $Q_i = T^i$, $0 \leqslant i \leqslant 4$ dar.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

im Standardvektorraum $V = \mathbb{Q}^3$. Bestimmen Sie die duale Basis a_1^*, a_2^*, a_3^* im Dualraum

$$V^* = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}) = \mathrm{Mat}_{1\times 3}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^3.$$

Tipp: Berechnen Sie ${}^tA^{-1}$ für eine relevante Matrix $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$.

Aufgabe 4. Wir identifizieren den Standardvektorraum $V = \mathbb{Q}^n$ mit seinem Dualraum $V^* = \mathrm{Mat}_{1\times n}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^n$ und betrachten den Endomorphismus

$$h : \mathrm{End}(\mathbb{Q}^n) \longrightarrow \mathrm{End}(\mathbb{Q}^n), \quad f \longmapsto f^*.$$

Benutzen Sie das Minimalpolynom $\mu_h(T) \in \mathbb{Q}[T]$, um zu zeigen, dass h diagonalisierbar ist, und die Jordan-Normalform zu bestimmen.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 6. Juni um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei K ein Körper von Charakteristik $p \neq 2$, und V ein beliebiger Vektorraum. Zeigen Sie, dass jede Bilinearform

$$\Phi : V \times V \longrightarrow K$$

sich in eindeutiger Weise als Summe $\Phi = \Phi' + \Phi''$ schreiben lässt, wobei Φ' symmetrisch und Φ'' antisymmetrisch ist.

Aufgabe 2. Sei $V \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ der 4-dimensionale reelle Untervektorraum aller komplexen Matrizen der Form

$$B = \begin{pmatrix} x & z \\ \bar{z} & y \end{pmatrix}$$

mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \in \mathbb{C}$. Rechnen Sie nach, dass

$$\Phi(B, C) = \det(B + C) - \det(B) - \det(C)$$

eine Bilinearform auf V ist. Wählen Sie eine Basis $A_1, \ldots, A_4 \in V$ und stellen Sie die Gram-Matrix auf.

Aufgabe 3. Sei $\Phi : V \times V \to K$ eine Bilinearform, die symmetrisch oder antisymmetrisch ist, und $U = \mathrm{Rad}(\Phi)$ ihr Radikal. Zeigen Sie, dass

$$\Psi(a + U, b + U) = \Phi(a, b)$$

wohldefiniert ist, und auf dem Quotientenvektorraum V/U eine Bilinearform definiert, die symmetrisch oder antisymmetrisch und nicht-entartetet ist.

Aufgabe 4. Wir betrachten auf dem Anschauungsraum $V = \mathbb{R}^3$ die symmetrische Bilinearform

$$\Phi(x, y) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} +\alpha_1 & & \\ & +\alpha_2 & \\ & & -\alpha_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

zu gegebenen reellen Zahlen $\alpha_i > 0$. Skizzieren Sie die Teilmenge

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi(x, x) = 0\}.$$

Abgabe: Bis Donnerstag, den 13. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 10

Aufgabe 1. Wir betrachten auf dem Anschauungsraum $V = \mathbb{R}^3$ die symmetrische Bilinearform

$$\Phi(x, y) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

(i) Verifizieren Sie, dass Φ nicht-entartet ist.

(ii) Berechnen Sie eine Basis für das orthogonale Komplement zu $e_1 = (1, 0, 0)$.

(iii) Bestimmen Sie die Signatur (r, s) mithilfe von Hauptminoren.

Aufgabe 2. Seien $\Phi, \Psi : V \times V \to K$ zwei nicht-entartete Bilinearformen. Sei $a_1, \ldots, a_n \in V$ eine Basis und $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ die resultierenden Gram-Matrizen für Φ beziehungsweise Ψ. Verifizieren Sie, dass die Polynome

$$\chi_{A^{-1}B}(T) \quad \text{und} \quad \mu_{A^{-1}B}(T)$$

nicht von der Wahl der Basis abhängen.

Aufgabe 3. Sei U ein m-dimensionaler K-Vektorraum. Wir betrachten auf $V = U \oplus U^*$ die Abbildung

$$\Phi : V \times V \longrightarrow K, \quad ((a, \varphi), (b, \psi)) \longmapsto \varphi(b) - \psi(a).$$

Verifizeren Sie, dass Φ alternierend und nicht-entartet ist. Finden Sie eine symplektische Basis von V, ausgehend von einer Basis $a_1, \ldots, a_m \in U$.

Aufgabe 4. Sei $\Phi : V \times V \to K$ eine symmetrische Bilinearform auf einem n-dimensionalen Vektorraum V über einem Körper von Charakteristik $p \neq 2$, und $a \in V$ ein Vektor mit $\Phi(a, a) \neq 0$. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad x \longmapsto x - 2\frac{\Phi(x, a)}{\Phi(a, a)} a.$$

Bestimmen Sie das Minimalpolynom $\mu_f(T) \in K[T]$. Folgern Sie daraus, dass f diagonalisierbar ist, und geben Sie die Eigenraumzerlegung an.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 20. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 11

Aufgabe 1. Geben Sie eine explizite Beschreibung der Elemente von $\mathrm{O}_{1,1}(K)$, analog zur expliziten Beschreibung der Elemente

$$S = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad S' = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{mit } a^2 + b^2 = 1$$

aus der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}_2(K)$.

Aufgabe 2. Sei $S \in \mathrm{O}(2)$ eine Matrix, die mit allen $R \in \mathrm{SO}(2)$ kommutiert, also $SR = RS$. Folgern Sie, dass $S \in \mathrm{SO}(2)$ gelten muss.

Aufgabe 3. Sei (V, Φ) ein symplektischer Vektorraum von Dimension $n = 2m$. Wir betrachten zu einem Vektor $a \neq 0$ und einem Skalar $\lambda \neq 0$ den Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad x \longmapsto x + \lambda\Phi(x, a)a.$$

Verifizieren Sie $f \in \mathrm{Aut}(V, \Phi)$. Zeigen Sie weiterhin $\det(f) = 1$, indem Sie den Vektor a zu einer Basis ergänzen und die resultierende Matrix S aufstellen.

Aufgabe 4. Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und $G \subset \mathrm{GL}(V)$ eine endliche Untergruppe. Zeigen Sie, dass es ein Skalarprodukt

$$\Phi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt so, dass $G \subset \mathrm{Aut}(V, \Phi)$ gilt. Tipp: Wählen Sie zunächst irgendein Skalarprodukt $\Psi(x, y)$ und betrachten Sie die Formen $\Psi_g(x, y) = \Psi(gx, gy)$ mit $g \in G$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 27. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

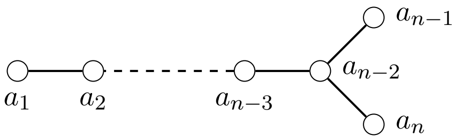
Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 12

Aufgabe 1. Unter einem *Graphen* Γ versteht man ein Gebilde aus *Ecken* und *Kanten*, zum Beispiel das Dynkin-Diagram D_n mit $n \geq 3$ Ecken:



Zu einem Graphen Γ betrachten wir den rationalen Vektorraum $V = \bigoplus \mathbb{Q}a_i$, dessen Basisvektoren $a_i \in V$ den Ecken $a_i \in \Gamma$ des Graphen entsprechen, und definieren eine symmetrische Bilinearform $\Phi : V \times V \to \mathbb{Q}$ durch

$$\Phi(a_i, a_j) = \begin{cases} -2 & \text{wenn die beiden Ecken } a_i, a_j \text{ übereinstimmen;} \\ 1 & \text{wenn } a_i \neq a_j \text{ durch eine Kante verbunden sind;} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie induktiv für die Gram-Matrix $A_n \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$ zu $\Gamma_n = D_n$ die Formel

$$\det(A_n) = (-1)^n \cdot 4.$$

Aufgabe 2. Schreiben Sie den Homomorphismus von Gruppen

$$\mathrm{SU}(2) \longrightarrow \mathrm{SO}(3), \quad S \longmapsto (B \mapsto SBS^{-1}),$$

welcher durch Konjugation auf den spurlosen anti-Hermiteschen Matrizen $B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$ gegeben ist, in expliziter Form

$$\begin{pmatrix} x+iy & -u+iv \\ u+iv & x-iy \end{pmatrix} \longmapsto (\lambda_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 3},$$

indem sie die Matrixeinträge λ_{ij} durch die Real- und Imaginärteile x, y, u, v ausdrücken.

Aufgabe 3. Sei $a \neq 0$ aus einem K-Vektorraum U, und $b \neq 0$ aus einem K-Vektorraum V. Verifizieren Sie, dass der elementare Tensor

$$a \otimes b \in U \otimes V$$

nicht der Nullvektor ist.

Aufgabe 4. Seien U und V zwei endlich-dimensionale K-Vektorräume. Zeigen Sie, dass die kanonische lineare Abbildung

$$f : U^* \otimes V \longrightarrow \operatorname{Hom}(U, V), \quad \varphi \otimes v \longmapsto (u \mapsto \varphi(u)v)$$

bijektiv ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 4. Juli um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Schriftliche Prüfungen: Die erste Klausur findet am Donnerstag, den 25. Juli von 8:30 bis 10:30 Uhr in den Hörsälen 5B/5F statt. Die Einteilung wird kurzfristig durch Aushang und ILIAS bekanntgegeben. Die Anmeldung zur ersten Klausur geschieht über das Studierendenportal bis zum 18. Juli.

Um zur Prüfung zugelassen zu werden, müssen Studierende der Mathematik 96 Punkte auf den Aufgabenblättern erreicht haben oder in der Vergangenheit bereits einen Prüfungsversuch unternommen haben. Die Modalitäten für die Hörer aus anderen Fächern finden sich auf der Homepage.

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 13

Aufgabe 1. Finden Sie Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ so, dass das Kronecker-Produkt

$$A \otimes B \in \mathrm{Mat}_4(K)$$

diagonalisierbar ist, ohne dass A, B trigonalisierbar sind.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper und $\lambda, \mu \neq 0$ zwei Skalare. Berechnen Sie die Jordan-Normalform des Kronecker-Produkts

$$P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$$

in Abhängigkeit von der Charakteristik $p \geq 0$.

Aufgabe 3. Sei $f : U \to V$ eine lineare Abbildung, und $i \geq 0$. Zeigen Sie, dass die induzierte lineare Abbildung

$$\Lambda^i(f) : \Lambda^i(U) \longrightarrow \Lambda^i(V), \quad x_1 \wedge \ldots \wedge x_i \longrightarrow f(x_1) \wedge \ldots \wedge f(x_i)$$

injektiv oder surjektiv ist, falls f die entsprechende Eigenschaft hat.

Aufgabe 4. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, $a \neq 0$ ein Vektor, und $0 \leqslant i \leqslant n$. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\Lambda^i(V) \longrightarrow \Lambda^{i+1}(V), \quad x \longmapsto x \wedge a.$$

Bestimmen Sie die Dimension des Kerns.

Abgabe: Entfällt, da nicht mehr in der Wertung.