Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 1

Aufgabe 1. Zeigen Sie zunächst mit der Regel von Sarrus, und dann nocheinmal mit der Laplace-Entwicklung, dass die Begleitmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & -\alpha_2 \end{pmatrix}$$

das charakteristische Polynom $\chi_C(T) = T^3 + \alpha_2 T^2 + \alpha_1 T + \alpha_0$ hat.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass 2×2-Matrizen der Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad J = \begin{pmatrix} \eta & 0 \\ 1 & \eta \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \neq \mu$ ähnlich zu einer Begleitmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha_0 \\ 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}$$

sind. Drücken Sie weiterhin $\alpha_0, \alpha_1 \in k$ durch die Matrixeinträge $\lambda \neq \mu$ beziehungsweise η aus.

Aufgabe 3. Seien $m, n \geq 0$ und $d = \min(m, n)$. Wir betrachten auf $\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)$ die Relation

$$A \sim A' \quad \Longleftrightarrow \quad A' = SAR \text{ mit } S \in \mathrm{GL}_m(K),\ R \in \mathrm{GL}_n(K).$$

Verifizieren Sie, dass es sich um eine Äquivalenzrelation handelt, und dass

$$\mathrm{Mat}_{m\times n}(K)/\!\sim\ \longrightarrow \{0, 1, \ldots, d\}, \quad [A] \longmapsto \mathrm{rank}(A)$$

wohldefiniert und bijektiv ist.

Aufgabe 4. Sei $X = \{a, b, c, d\}$ eine vier-elementige Menge. Wieviele Äquivalenzrelationen $R \subset X \times X$ gibt es?

Abgabe: Bis Donnerstag, den 18. April um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Klausurtermine: Dienstag, der 25. Juli und Montag, der 30. September.

Hinweis zur gesamten Lehrveranstaltung: Bild- und Tonaufnahmen sowie die unautorisierte Verbreitung von Vorlesungsmitschriften insbesondere im Internet sind aus urheberrechtlichen und didaktischen Gründen nicht gestattet.

Hinweise zum Bearbeiten der Übungsaufgaben:

1. Beschäftigen Sie sich bereits *ab dem Ausgabetag* mit den Übungsaufgaben.
2. Schlagen Sie in Ihrer Vorlesungsmitschrift sowie einem Lehrbuch die exakte Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe nach. Verdeutlichen Sie sich die Aussagen durch *Beispiele* und *Spezialfälle*.
3. *Diskutieren* Sie mit Ihren Kommilitonen über die Aufgaben. Es ist eine vorzügliche Idee, kleine Arbeitsgruppen zur Bearbeitung der Aufgaben zu bilden.
4. Schreiben Sie Ihre Lösungen in *korrekten und vollständigen deutschen Sätzen* auf! Die Verwendung von logischen Symbolen wie $\forall, \exists, \Leftrightarrow$ ist im Fließtext grundsätzlich unzulässig! In abgesetzten Formel sind diese erlaubt.
5. Wenn Sie eine Gleichheit $X = Y$ von Mengen zeigen wollen, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Inklusion $X \subset Y$ und $Y \subset X$ verifizieren.
6. Wollen Sie beweisen, dass ,,A genau dann gilt, wenn B gilt", müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Implikation ,,wenn A, dann B" sowie ,,wenn B, dann A" zeigen! (Ersteres besagt, dass B *notwendig* für A ist, während Letzteres bedeutet, dass B *hinreichend* für A ist.)
7. Die Aussage ,,wenn A, dann B" ist äquivalent zur Aussage ,,wenn B nicht gilt, dann gilt A nicht".
8. Wollen Sie zeigen, dass eine Aussage falsch ist, reicht es, ein *einziges Gegenbeispiel* anzugeben! Aus Bequemlichkeit wähle man dieses so einfach wie möglich.
9. Wenn Sie Resultate *aus der Vorlesung zitieren* wollen, schreiben Sie beispielsweise: ,,Wegen Vorlesung, Proposition 3.12 gilt..."
10. Alle Abgaben müssen *handschriftlich*, individuell, und ohne elektronische Hilfsmittel verfasst sein.
11. Verwenden Sie *Deckblatt* und *Heftklammern* für Ihre Abgaben!

Die Korrektoren sind angewiesen, bei Nichtbeachtung von Hinweis 4 pro Aufgabe einen Punkt abzuziehen.