Mathematisches Institut SS 2024
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 3

Aufgabe 1. Seien $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$ Matrizen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(i) Ist A trigonalisierbar, so auch die Transponierte ${}^tA$.

(ii) Sind A, B trigonalisierbar, so auch die Summe $A + B$.

(iii) Sind A, B trigonalisierbar, so auch das Produkt AB.

(iv) Ist A trigonalisierbar und invertierbar, so auch das Inverse A^{-1}.

Aufgabe 2. Sei $V = \mathrm{Mat}_2(K)$ und $C = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)$ eine obere Dreiecksmatrix mit Determinante $\det(C) = 1$. Wir betrachten den Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad A \longmapsto CAC^{-1}.$$

Zeigen Sie, dass f trigonalisierbar ist.

Aufgabe 3. (i) Zeigen Sie, dass es zu jedem $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ einen invarianten Unterraum $U \subset \mathbb{R}^3$ von Dimension $n = 1$ gibt.

(ii) Konstruieren Sie ein $B \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{Q})$, für das $U = 0$ und $U = \mathbb{Q}^3$ die einzigen invarianten Unterräume sind.

Tipp: Betrachten Sie die charakteristischen Polynome und ihre Faktorisierungen.

Aufgabe 4. Seien $U, U' \subset V$ zwei Untervektorräume eines Vektorraumes. Benutzen Sie den Isomorphiesatz, um eine Identifizierung

$$U/(U \cap U') = (U + U')/U'$$

von Quotientenvektorräumen zu erhalten. Folgern Sie daraus für endlich-dimensionale Vektorräume die Dimensionsformel

$$\dim(U + U') = \dim(U) + \dim(U') - \dim(U \cap U').$$

Abgabe: Bis Donnerstag, den 2. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.