Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2024

Übungen zu Lineare Algebra II

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum, $f : V \to V$ nilpotent, und

$$A = \begin{pmatrix} J_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_r} \end{pmatrix}, \quad n_1 \geq \ldots \geq n_r$$

seine Jordan-Normalform. Drücken Sie die Anzahl $r \geq 0$ der Blöcke durch den Rang von f aus.

Aufgabe 2. (i) Bestimmen Sie die möglichen Jordan-Normalformen für nilpotente $n \times n$-Matrizen für die Zahl $n = 6$.

(ii) Sei $V \subset \mathbb{F}_3[T]$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad $\deg(P) \leqslant 5$. Was ist die Jordan-Normalform der Ableitungsoperators $V \to V$, $P \mapsto P'$?

Aufgabe 3. Seien A_i, $1 \leqslant i \leqslant 5$ die fünf möglichen Jordan-Normalformen für nilpotenten Matrizen $B \in \mathrm{Mat}_4(K)$. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi : \{A_1, \ldots, A_5\} \longrightarrow \{A_1, \ldots, A_5\},$$

welche $A = A_i$ auf die Jordan-Normalform von $B = A^2$ abbildet. Stellen Sie zu dieser Abbildung die Wertetabelle auf.

Aufgabe 4. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Matrix $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$ nilpotent ist, beträgt $\nu(n,p)/p^{n^2}$, wobei $\nu(n,p) \geq 1$ die Anzahl der nilpotenten Matrizen $N \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{F}_p)$ ist. Bestimmen Sie $\nu(2,p)$.

Abgabe: Bis Mittwoch, den 8. Mai um 10:25 Uhr im Zettelkasten.