Mathematisches Institut
Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2024

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra II

Erste Klausur am 25. Juli 2024

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

- Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.
- Anderes mitgebrachte Papier, Bücher, elektronische Geräte etc. bleiben während der gesamten Prüfung verstaut.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis sichtbar aus und tragen Sie oben Ihre Daten ein.
- Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie Ihre Antworten.
- Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

1	2	3	4	5	Summe	Note

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und $A \in \mathrm{Mat}_2(K)$. Zeigen Sie, dass A genau dann ähnlich zu einer Begleitmatrix ist, wenn A keine Skalarmatrix λE ist. Tipp: Verschaffen Sie sich Vektoren, die keine Eigenvektoren sind.

Aufgabe 2. Sei $V = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ für ein $n \geq 0$, und $U \subset V$ der reelle Untervektorraum aller anti-Hermiteschen Matrizen $A = (z_{ij})$ mit Spur $\mathrm{tr}(A) = 0$. Bestimmen $\dim_{\mathbb{R}}(V/U)$.

Aufgabe 3. Sei K ein Körper, V ein Vektorraum von Dimension $n = 8$, und $f \in \mathrm{End}(V)$ ein Endomorphismus mit

$$\chi_f(T) = (T-\lambda)^6(T-\mu)^2 \quad \text{und} \quad \mu_f(T) = (T-\lambda)^3(T-\mu),$$

für zwei Skalare $\lambda \neq \mu$ aus K. Verifizieren Sie, dass f trigonalisierbar ist, und geben Sie die möglichen Jordan-Normalformen an, mit zugehörigen Partitionen und Young-Diagrammen.

Aufgabe 4. Wir betrachten die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

Zeigen Sie, dass die symmetrischen Bilinearform $\Phi(x,y) = {}^t x A y$ nicht-entartet ist, und berechnen Sie die Signatur.

Aufgabe 5. Sei U und V zwei Vektorräume über einem Körper K. Verifizieren Sie, dass die Abbildung

$$\Psi : U^* \times V \longrightarrow \mathrm{Hom}(U,V), \quad (\varphi, y) \longmapsto (x \mapsto \varphi(x)y)$$

bilinear ist. Zeigen Sie für die resultierende lineare Abbildung $U^* \otimes V \to \mathrm{Hom}(U,V)$ weiterhin, dass jeder Homomorphismus $f : U \to V$ vom Rang eins als Bild eines elementaren Tensors $\varphi \otimes y$ auftritt.