Mathematisches Institut
Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2024

Klausur zur Vorlesung Lineare Algebra II

Zweite Klausur am 30. September 2024

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

- Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.
- Anderes mitgebrachte Papier, Bücher, elektronische Geräte etc. bleiben während der gesamten Prüfung verstaut.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis sichtbar aus und tragen Sie oben Ihre Daten ein.
- Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie Ihre Antworten.
- Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

1	2	3	4	5	Summe	Note

Aufgabe 1. Sei $A \in \mathrm{Mat}_5(K)$ eine Matrix mit Jordan-Normalform

$$J = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & 0 & & \\ & & & 3 & \\ & & & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

über einem Körper K von Charakteristik $p \neq 3$. Bestimmen Sie für A^2 die Dimensionen des Bildes sowie des Kerns.

Aufgabe 2. Zeigen Sie durch Laplace-Entwicklung und Induktion nach $n \geq 2$, dass für die Begleitmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & & & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & & -\alpha_1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(K)$$

das charakteristische Polynom durch $\chi_C(T) = T^n + \alpha_{n-1}T^{n-1} + \ldots + \alpha_0$ gegeben ist.

Aufgabe 3. Wir betrachten die Basisvektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

im Standardvektorraum $V = \mathbb{Q}^3$. Bestimmen Sie die duale Basis a_1^*, a_2^*, a_3^* im Dualraum

$$V^* = \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}^3, \mathbb{Q}) = \mathrm{Mat}_{1\times 3}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^3.$$

Aufgabe 4. Sei $V \subset \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_2)$ der Unterraum der spurlosen Matrizen. Verifizieren Sie mit dem Minimalpolynom, dass der Endomorphismus

$$f : V \longrightarrow V, \quad A \longmapsto {}^tA$$

trigonalisierbar ist, und bestimmen Sie seine Jordan-Normalform.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass die reelle Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ nicht trigonalisierbar ist, aber dass das Kronecker-Produkt

$$A \otimes A \in \mathrm{Mat}_4(\mathbb{R})$$

diagonalisierbar ist.