

Übungen zur Algebra

Blatt 1

Aufgabe 1. Wir betrachten die komplexen 2×2 -Matrizen

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifizieren Sie, dass die Teilmenge $Q = \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$ eine Untergruppe in $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ ist, und bestimmen Sie das Zentrum

$$Z = \{A \in Q \mid AB = BA \text{ für alle } B \in Q\}.$$

Aufgabe 2. Sei $G = \text{GL}_4(\mathbb{F}_2)$. Wir betrachten die Teilmenge H aller Matrizen der Form

$$S(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \alpha & & 1 & \\ \beta & & \alpha & 1 \\ \alpha + \alpha\beta + \beta & \alpha + \beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{F}_2.$$

Zeigen Sie, dass $H \subset G$ eine Untergruppe ist, die isomorph zur zyklischen Gruppe $C_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe, $\varphi : G \rightarrow G$ eine Abbildung, und $G^\varphi = \{a \in G \mid \varphi(a) = a\}$ die Fixpunktmenge. Verifizieren Sie, dass $G^\varphi \subset G$ eine Untergruppe ist, sofern φ ein Homomorphismus ist. Zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, dass die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe 4. Zu gegebenen $p, q \in \mathbb{C}$ bilden wir die komplexen Wurzeln

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \quad \text{und} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

unter der Nebenbedingung $uv = -p/3$, und setzen $\zeta = e^{2\pi i/3}$. Rechnen Sie nach, dass

$$\omega_i = \zeta^i u + \zeta^{-i} v$$

Wurzeln des Polynoms $P(T) = T^3 + pT + q$ sind (Cardanos Formel).

Abgabe: Bis Montag, den 14. April um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Prüfungstermine: Erste Klausur am Donnerstag, den 24. Juli von 12:00 bis 14:00. Zweite Klausur am Montag, den 29. September von 9:00 bis 11:00.

Zulassungsvoraussetzung für Studierende im Fach Mathematik: Erreichen von $40\% = 12 \times 20 \times 0,4 = 96$ Punkten bei den Aufgabenblättern. Die Teilnahme an den Übungsgruppen wird durch Anwesenheitslisten erhoben. Hatten Sie in der Vergangenheit an einer Prüfung zur Algebra ohne Erfolg teilgenommen, sind Sie ebenfalls zugelassen.

Hinweis zur gesamten Lehrveranstaltung: Bild- und Tonaufnahmen sowie die unautorisierte Verbreitung von Vorlesungsmitschriften insbesondere im Internet sind aus urheberrechtlichen und didaktischen Gründen nicht gestattet.

Hinweise zum Bearbeiten der Übungsaufgaben:

1. Beschäftigen Sie sich bereits *ab dem Ausgabetag* mit den Übungsaufgaben.
2. Schlagen Sie in Ihrer Vorlesungsmitschrift sowie einem Lehrbuch die exakte Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe nach. Verdeutlichen Sie sich die Aussagen durch *Beispiele* und *Spezialfälle*.
3. *Diskutieren* Sie mit Ihren Kommilitonen über die Aufgaben. Es ist eine vorzügliche Idee, kleine Arbeitsgruppen zur Bearbeitung der Aufgaben zu bilden.
4. Schreiben Sie Ihre Lösungen in *korrekten und vollständigen deutschen Sätzen* auf! Die Verwendung von logischen Symbolen wie $\forall, \exists, \Leftrightarrow$ ist im Fließtext grundsätzlich unzulässig! In abgesetzten Formel sind diese erlaubt.
5. Wenn Sie eine Gleichheit $X = Y$ von Mengen zeigen wollen, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Inklusion $X \subset Y$ und $Y \subset X$ verifizieren.
6. Wollen Sie beweisen, dass „ A genau dann gilt, wenn B gilt“, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Implikation „wenn A , dann B “ sowie „wenn B , dann A “ zeigen! (Ersteres besagt, dass B *notwendig* für A ist, während Letzteres bedeutet, dass B *hinreichend* für A ist.)
7. Die Aussage „wenn A , dann B “ ist äquivalent zur Aussage „wenn B nicht gilt, dann gilt A nicht“.
8. Wollen Sie zeigen, dass eine Aussage falsch ist, reicht es, ein *einziges Gegenbeispiel* anzugeben! Aus Bequemlichkeit wähle man dieses so einfach wie möglich.
9. Wenn Sie Resultate *aus der Vorlesung zitieren* wollen, schreiben Sie beispielsweise: „Wegen Vorlesung, Proposition 3.12 gilt...“
10. Alle Abgaben müssen *handschriftlich*, individuell, und ohne elektronische Hilfsmittel verfasst sein.
11. Verwenden Sie *Deckblatt* und *Heftklammern* für Ihre Abgaben!

Die Korrektoren sind angewiesen, bei Nichtbeachtung von Hinweis 4 pro Aufgabe einen Punkt abzuziehen.

Übungen zur Algebra

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und V ein K -Vektorraum von Dimension $n \geq 1$. Die Gruppe $G = \mathrm{GL}(V)$ wirkt auf der Menge X aller 1-dimensionalen Untervektorräume $L \subset V$ durch $g \cdot L = g(L)$. Zeigen Sie mit dem Basisergänzungssatz, dass es nur eine Bahn gibt, und beschreiben Sie die Standgruppen G_L .

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe, H eine Untergruppe, $X = G/H$ die resultierende G -Menge, und

$$f : G \longrightarrow S_X, \quad a \longmapsto (xH \mapsto axH)$$

der entsprechendem Homomorphismus. Folgern Sie mit dieser Abbildung, dass $H \subset G$ ein Normalteiler ist, sofern für den Index $[G : H] = 2$ gilt.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe. Zeigen Sie, dass

$$f : G \longrightarrow \mathrm{Aut}(G), \quad a \longmapsto (x \mapsto axa^{-1})$$

ein Homomorphismus ist, bei dem das Bild $f(G) \subset \mathrm{Aut}(G)$ normal ist.

Aufgabe 4. Die Gruppe $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_p)$ wirkt auf der Menge X aller trigonalisierbaren Matrizen $A \in \mathrm{Mat}_2(\mathbb{F}_p)$ durch Konjugation. Bestimmen Sie mittels Jordan-Normalform die Anzahl der Bahnen $G \cdot A \subset X$, und berechnen Sie für

$$J = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

die Standgruppe G_J .

Abgabe: Bis Dienstag, den 22. April um 10:25 Uhr im Zettelkasten.

Übungen zur Algebra

Blatt 3

Aufgabe 1. Welche der folgende Teilmengen H_i in der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ sind Untergruppen? Welche sind Normalteiler?

- (i) Die Menge H_1 aller Matrizen A mit $\det(A) > 0$.
- (ii) Die Menge H_2 aller Matrizen $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit Einträgen $a, b, c, d > 0$.
- (iii) Die Menge H_3 aller Matrizen A wie oben mit $a = 0$.
- (iv) Die Menge H_4 aller Matrizen A wie oben mit $c = 0$.
- (v) Die Menge H_5 aller invertierbaren symmetrischen Matrizen.

Aufgabe 2. Wir betrachten die zyklischen Gruppen $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Zeigen Sie

$$C_2 \times C_3 \simeq C_6 \quad \text{und} \quad C_3 \times C_3 \not\simeq C_9.$$

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe, X eine G -Menge, und $Z \subset X$ eine Teilmenge. Man bezeichnet

$$C_G(Z) = \{\sigma \in G \mid \sigma \cdot z = z \text{ für alle } z \in Z\}$$

als den *Zentralisator*, und

$$N_G(Z) = \{\sigma \in G \mid \sigma(Z) = Z\}$$

als den *Normalisator* von Z in G .

- (i) Verifizieren Sie, dass es sich um Untergruppen handelt, und dass $C_G(Z)$ ein Normalteiler von $N_G(Z)$ ist. Der resultierende Quotient $W = N_G(Z)/C_G(Z)$ wird auch *Weyl-Gruppe* genannt.
- (ii) Sei nun $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, und $X = G$ bezüglich der Konjugationswirkung, und Z die Untergruppe aller Diagonalmatrizen. Berechnen Sie Zentralisator, Normalisator, sowie die Weyl-Gruppe.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler.

- (i) Zeigen Sie, dass die Quotientengruppe G/N abelsch ist genau dann, wenn für alle $a, b \in G$ der *Kommutator* $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ in N liegt.
- (ii) Folgern Sie, dass es unter allen Normalteilern $N \subset G$ mit abelschen Quotienten ein kleinstes N_0 gibt.

Abgabe: Bis Montag, den 28. April um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Übungen zur Algebra

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei K ein Körper. Finden Sie für die spezielle lineare Gruppe $N = \mathrm{SL}_n(K)$ in $G = \mathrm{GL}_n(K)$ ein Komplement H , und beschreiben Sie für das resultierende semidirekte Produkt $G = N \rtimes_{\varphi} H$ den Homomorphismus

$$\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{SL}_n(K)), \quad S \longmapsto (A \mapsto SAS^{-1}).$$

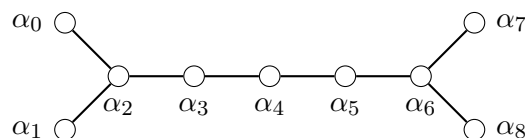
Aufgabe 2. Wir betrachten die alternierende Gruppe $G = A_4$.

- (i) Zeigen Sie, dass es genau eine Untergruppe $N \subset G$ von Ordnung vier gibt. Deduzieren Sie, dass N normal ist.
- (ii) Bestimmen Sie alle $\sigma \in G$ mit $\mathrm{ord}(\sigma) = 3$ sowie alle Untergruppen $H \subset G$ mit $|H| = 3$.
- (iii) Folgern Sie, dass die Gruppe $G = A_4$ isomorph zu einem semidirekten Produkt $\mathbb{F}_2^{\oplus 2} \rtimes_{\varphi} C_3$ ist.

Aufgabe 3. Wir betrachten die symmetrische Gruppe $G = S_n$, wobei $n = 2p - 1$ für eine Primzahl $p > 0$.

- (i) Bestimmen Sie alle p -Gruppen $H \subset G$.
- (ii) Zeigen Sie durch ein direktes Argument, dass all diese H zueinander konjugiert sind.

Aufgabe 4. Wir betrachten den folgenden Graphen Γ mit neun Ecken:



Seine Automorphismengruppe $H = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ besteht aus den Permutationen der Eckenmenge $X = \{\alpha_0, \dots, \alpha_8\}$, welche Kanten in Kanten überführen. Geben Sie alle Element $\sigma \in H$ in Zyklenschreibweise an und bestimmen Sie deren Ordnungen.

Abgabe: Bis Montag, den 5. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Übungen zur Algebra

Blatt 5

Aufgabe 1. Wir betrachten die Gruppe $G = S_6$. Zeigen Sie mit den Sylow-Sätzen, dass es genau 36 Untergruppen H_i von Ordnung $|H_i| = 5$ gibt.

Aufgabe 2. Beweisen Sie, dass eine Gruppe G von Ordnung

$$|G| = 2^3 \cdot p \quad \text{mit } p = 3, 5, 7$$

nicht einfach sein kann. Benutzen Sie dabei die Konjugationswirkung auf der Menge $\text{Syl}_2(G)$, oder die Anzahl $s_p \geq 1$ der p -Sylow-Gruppen, oder die Teilmenge $\{\sigma \in G \mid \text{ord}(\sigma) = p\}$.

Aufgabe 3. Geben Sie fünf Gruppen $G_1, \dots, G_5$ von Ordnung $n = 8$ an. Begründen Sie, warum diese paarweise nicht isomorph sind.

Aufgabe 4. Sei $G = N \rtimes_{\varphi} H$ ein semidirektes Produkt und $c : H \rightarrow N$ eine Abbildung mit $c(e_H) = e_N$. Wir betrachten das resultierende

$$s : H \longrightarrow N \rtimes_{\varphi} H, \quad x \longmapsto (c(x), x).$$

Zeigen Sie, dass dies ein Homomorphismus von Gruppen ist genau dann, wenn für alle $x, y \in H$ die sogenannte *Kozykel-Bedingung*

$$\varphi_x(c(y)) \cdot c(xy)^{-1} \cdot c(x) = e_N$$

gilt.

Abgabe: Bis Montag, den 12. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Übungen zur Algebra

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei $\varphi : R' \rightarrow R$ ein Homomorphismus von Ringen. Beweisen oder widerlegen Sie:

- (i) Ist $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal, so ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) \subset R'$ ein Primideal.
- (ii) Ist $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal, so ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}) \subset R'$ ein maximales Ideal.
- (iii) Ist $\mathfrak{a}' \subset R'$ ein Ideal, so ist $\varphi(\mathfrak{a}') \subset R$ ein Ideal.
- (iv) Ist R nicht der Nullring, so gibt es ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$.
- (v) Hat R nur ein einziges maximales Ideal $\mathfrak{m}$, so gilt $R^\times = R \setminus \mathfrak{m}$.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring und $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei Ideale mit $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = R$. Zeigen Sie, dass die kanonische Abbildung

$$\varphi : R/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \longrightarrow (R/\mathfrak{a}) \times (R/\mathfrak{b}), \quad (x + \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \longmapsto (x + \mathfrak{a}, x + \mathfrak{b})$$

bijektiv ist.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring und $S \subset R$ ein multiplikatives System, also ein Untermonoid von R bezüglich der Multiplikation.

- (i) Verifizieren Sie, dass

$$(f, s) \sim (f', s') \iff fs'a = f'sa \text{ für ein } a \in S$$

eine Äquivalenzrelation auf der Menge $R \times S$ ist.

- (ii) Wir schreiben $S^{-1}R$ für die resultierende Quotientenmenge, und f/s für die Äquivalenzklasse des Paares (f, s) . Rechnen Sie nach, dass die Verknüpfungen

$$\frac{f}{s} + \frac{g}{t} = \frac{ft + gs}{st} \quad \text{und} \quad \frac{f}{s} \cdot \frac{g}{t} = \frac{fg}{st}$$

wohldefiniert sind.

- (iii) Verifizieren Sie das Distributivgesetz für $S^{-1}R$, und dass jeder Bruch $s/1$, $s \in S$ invertierbar ist.

Aufgabe 4. Sei K ein Körper, $A \in \text{Mat}_n(K)$ eine Matrix, und $P = \mu_A(T)$ das Minimalpolynom.

- (i) Identifizieren Sie den Restklassenring $R = K[T]/(P)$ mit dem von der Matrix erzeugten Unterring $K[A] \subset \text{Mat}_n(K)$.
- (ii) Ordnen Sie in kanonischer Weise jedem Eigenwert $\lambda \in K$ der Matrix ein Primideal $\mathfrak{p} \subset R$ des Restklassenrings zu.

Abgabe: Bis Montag, den 26. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Übungen zur Algebra

Blatt 7

Aufgabe 1. Wir betrachten im faktoriellen Ring $R = \mathbb{Z}[T]$ das Ideal

$$\mathfrak{m} = (p, T^2 + T + 1),$$

wobei $p > 0$ eine Primzahl mit $p \equiv 2$ modulo 3 ist. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{m} \subset R$ ein maximales Ideal ist, und dass der Restekörper $\kappa = R/\mathfrak{m}$ aus p^2 Elementen besteht.

Aufgabe 2. Sei $R = \mathcal{C}(\mathbb{R})$ der Ring der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Zu jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir

$$\mathfrak{m}_a = \{f \in R \mid f(a) = 0\}.$$

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

- (i) Der Ring R ist nicht integer.
- (ii) Die Teilmengen $\mathfrak{m}_a \subset R$ sind maximale Ideale.
- (iii) Gilt $\mathfrak{m}_a = \mathfrak{m}_b$ so müssen die Punkte $a, b \in \mathbb{R}$ übereinstimmen.
- (iv) Es gibt maximale Ideale $\mathfrak{m} \subset R$, die nicht von obigen Form sind.

Aufgabe 3. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K . Zeigen Sie mit dem Lemma von Zorn, dass es linear unabhängige Teilmengen $B \subset V$ gibt, die maximal bezüglich der Inklusionsrelation sind. Folgern Sie daraus, dass es eine Basis $e_i \in V$, $i \in I$ gibt.

Aufgabe 4. Sei R ein euklidischer Ring, T eine Unbestimmte, und

$$R((T)) = R[[T]][1/T]$$

der Ring der *formalen Laurent-Reihen* $f = \sum_{i \geq m} a_i T^i$, wobei $m \in \mathbb{Z}$ und $a_i \in R$. Beweisen Sie, dass $R((T))$ euklidisch ist.

Abgabe: Bis Montag, den 2. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Übungen zur Algebra

Blatt 8

Aufgabe 1. Zeigen Sie mit dem Reduktionskriterium, dass

$$P(T) = T^4 + 5T^2 + 2$$

in $\mathbb{Z}[T]$ ein Primelement ist.

Aufgabe 2. Sei $p > 0$ eine Primzahl. Bestimmen Sie die Anzahl der normierten irreduzible Polynome $P(T) \in \mathbb{F}_p[T]$ vom Grad $d = 2$ sowie $d = 3$.

Aufgabe 3. Wir betrachten das Polynom $P(T) = T^3 + T^2 + T + 1$. Finden Sie über den Körper

$$F = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{F}_7, \mathbb{F}_{13}, \mathbb{Q}(X)$$

die jeweilige Zerlegung in irreduzible Polynome.

Aufgabe 4. Sei $P(T) = a_5T^5 + \dots + a_0$ ein primitives Polynom vom Grad $n = 5$ über einem faktoriellen Ring R . Angenommen, es gibt ein Primelement $\pi \in R$ mit

$$\pi \nmid a_5 \quad \text{and} \quad \pi^3 \nmid a_0 \quad \text{and} \quad \pi \mid a_i \quad \text{and} \quad \pi^2 \mid a_j$$

für $i = 4, 3$ und $j = 2, 1, 0$. Folgern Sie wie beim Eisenstein-Kriterium, dass $P(T) \in R[T]$ ein Primelement ist.

Abgabe: Bis Montag, den 16. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Übungen zur Algebra

Blatt 9

Aufgabe 1. Sei $K = \mathbb{Q}^{\text{alg}} \cap \mathbb{R}$ der Körper alle reellen algebraischen Zahlen $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass für jede endliche Erweiterung $K \subsetneq L$ der Grad $n = [L : K]$ eine gerade Zahl sein muss.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass das Polynom $P(T) = T^2 - T + 1$ über den rationalen Zahlen irreduzibel ist, und dass die beiden Körpererweiterungen

$$\mathbb{Q}(e^{2\pi i/3}) \subset \mathbb{C} \quad \text{and} \quad L = \mathbb{Q}[T]/(P)$$

isomorph sind.

Aufgabe 3. Sei $L = K(\omega)$ eine quadratische Körpererweiterung, und $P(T)$ das Minimalpolynom von $\omega \in L$. Drücken Sie für jedes $\lambda = \beta_0 + \beta_1\omega$ aus L die Spur und Determinante der K -linearen Abbildung

$$f : L \longrightarrow L, \quad x \longmapsto \lambda x$$

durch die Koeffizienten von $P(T)$ aus, und bestimmen Sie mit dem Satz von Cayley-Hamilton das Minimalpolynom $Q(T)$ von λ .

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die beiden Ringe

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \quad \text{and} \quad \mathbb{C} \times \mathbb{C}$$

isomorph als $\mathbb{R}$ -Algebren sind.

Abgabe: Bis Montag, den 23. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Übungen zur Algebra

Blatt 10

Aufgabe 1. Verifizieren Sie, dass man jeden endlichen Körper $\mathbb{F}_{p^r}$ als Restklassenring $\mathbb{Z}[T]/\mathfrak{m}$ sowie als Unterring $\mathbb{F}_p[A] \subset \text{Mat}_s(\mathbb{F}_p)$ schreiben kann, mit einem maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ bzw. einer Begleitmatrix A .

Aufgabe 2. Wir betrachten den endlichen Körper $E = \mathbb{F}_{p^r}$.

- (i) Für welche Exponenten $r \geq 1$ gibt es genau vier Unterkörper $L \subset E$?
- (ii) Für welches r ist die Menge der Unterkörper $L \subset E$ total geordnet?

Aufgabe 3. Was ist das Kompositum $\mathbb{F}_{p^r} \cdot \mathbb{F}_{p^s}$ von zwei endlichen Körpern, aufgefasst als endliche Erweiterungen von $\mathbb{F}_p$?

Aufgabe 4. Sei $q = 7^3$, und $\omega \in \mathbb{F}_q$ eine primitive $(q-1)$ -te Einheitswurzel. Für welche Exponenten n gilt $\mathbb{F}_q = \mathbb{F}_p(\omega^n)$?

Abgabe: Bis Montag, den 30. Juni um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Übungen zur Algebra

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei $\omega \in \mathbb{C}$ eine algebraische Zahl, und $E = \mathbb{Q}(\omega)$ die resultierende Körpererweiterung.

- (i) Angenommen, $\mathbb{Q} \subset E$ ist galoisch. Verifizieren Sie, dass die komplexe Konjugation $z \mapsto \bar{z}$ einen $\mathbb{Q}$ -Automorphismus $\sigma : E \rightarrow E$ induziert.
- (ii) Finden Sie ein Beispiel für ω , bei dem die komplexe Konjugation diese Eigenschaft nicht hat.

Aufgabe 2. Sei $\mathbb{Q} \subset E$ der Zerfällungskörper zur Familie aller normierten quadratischen Polynome $P \in \mathbb{Q}[T]$. Verifizieren Sie, dass die Galois-Gruppe

$$G = \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$$

abelsch ist, und $\sigma^2 = e$ für alle $\sigma \in G$ gilt.

Aufgabe 3. Sei $K \subsetneq L$ eine algebraische Erweiterung in Charakteristik $p \geq 0$, bei der zu jedem $\lambda \in L$ das Minimalpolynom $P \in K[T]$ nur eine einzige Wurzel in K^{alg} hat. Zeigen Sie

$$p > 0 \quad \text{und} \quad \text{Aut}(L/K) = \{e\}.$$

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und ω_1, ω_2 zwei Unbestimmte. Wir rechnen nun in der Erweiterung $E = K(\omega_1, \omega_2)$ und setzen $\omega_3 = -(\omega_1 + \omega_2)$. Seien $r, s \in E$ die Koeffizienten des Polynoms

$$(T - \omega_1)(T - \omega_2)(T - \omega_3) = T^3 + rT + s.$$

Verifizieren Sie durch explizites Nachrechnen die Gleichheit

$$(\omega_1 - \omega_2)^2(\omega_1 - \omega_3)^2(\omega_2 - \omega_3)^2 = -(4r^3 + 27s^2).$$

Abgabe: Bis Montag, den 7. Juli um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Übungen zur Algebra

Blatt 12

Aufgabe 1. Sei R ein Ring und $n \geq 0$. Zeigen Sie, dass die Gruppe

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in R^\times \right\} \subset \mathrm{GL}_n(R)$$

aller invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen auflösbar ist.

Aufgabe 2. Sei $p > 0$ prim. Zeigen Sie, dass die Erweiterung

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[4]{p})$$

nicht-galoisch vom Grad vier ist, jedoch als Verkettung von zwei quadratischen Galois-Erweiterungen geschrieben werden kann.

Aufgabe 3. Wir betrachten den quadratischen Zahlkörper $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ und die primitive 12-te Einheitswurzel $\zeta = e^{2\pi i/12}$. Geben Sie die Einheiten im Ring $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ an, bestimme Sie die invarianten Faktoren der Einheitengruppe, und beschreiben Sie die Untergruppe

$$\mathrm{Gal}(E(\zeta)/E) \subset (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^\times.$$

Aufgabe 4. Sei $K \subset L$ eine separable Erweiterung. Zeigen Sie, dass es eine Erweiterung $L \subset E$ mit folgender Eigenschaft gibt: Die Verkettung $K \subset E$ ist galoisch, und für jede weitere Erweiterung $L \subset E'$ mit $K \subset E'$ galoisch gibt es einen L -Homomorphism $E \rightarrow E'$.

Abgabe: Bis Montag, den 14. Juli um 8:25 Uhr im Zettelkasten.