

Übungen zur Algebra

Blatt 1

Aufgabe 1. Wir betrachten die komplexen 2×2 -Matrizen

$$I = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad K = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifizieren Sie, dass die Teilmenge $Q = \{\pm E, \pm I, \pm J, \pm K\}$ eine Untergruppe in $\text{GL}_2(\mathbb{C})$ ist, und bestimmen Sie das Zentrum

$$Z = \{A \in Q \mid AB = BA \text{ für alle } B \in Q\}.$$

Aufgabe 2. Sei $G = \text{GL}_4(\mathbb{F}_2)$. Wir betrachten die Teilmenge H aller Matrizen der Form

$$S(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \alpha & 1 & & \\ \beta & \alpha & 1 & \\ \alpha + \alpha\beta + \beta & \alpha + \beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{F}_2.$$

Zeigen Sie, dass $H \subset G$ eine Untergruppe ist, die isomorph zur zyklischen Gruppe $C_4 = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ ist.

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe, $\varphi : G \rightarrow G$ eine Abbildung, und $G^\varphi = \{a \in G \mid \varphi(a) = a\}$ die Fixpunktmenge. Verifizieren Sie, dass $G^\varphi \subset G$ eine Untergruppe ist, sofern φ ein Homomorphismus ist. Zeigen Sie mit einem Gegenbeispiel, dass die Umkehrung nicht gilt.

Aufgabe 4. Zu gegebenen $p, q \in \mathbb{C}$ bilden wir die komplexen Wurzeln

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} \quad \text{und} \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}}$$

unter der Nebenbedingung $uv = -p/3$, und setzen $\zeta = e^{2\pi i/3}$. Rechnen Sie nach, dass

$$\omega_i = \zeta^i u + \zeta^{-i} v$$

Wurzeln des Polynoms $P(T) = T^3 + pT + q$ sind (Cardanos Formel).

Abgabe: Bis Montag, den 14. April um 8:25 Uhr im Zettelkasten.

Prüfungstermine: Erste Klausur am Donnerstag, den 24. Juli von 12:00 bis 14:00. Zweite Klausur am Montag, den 29. September von 9:00 bis 11:00.

Zulassungsvoraussetzung für Studierende im Fach Mathematik: Erreichen von $40\% = 12 \times 20 \times 0,4 = 96$ Punkten bei den Aufgabenblättern. Die Teilnahme an den Übungsgruppen wird durch Anwesenheitslisten erhoben. Hatten Sie in der Vergangenheit an einer Prüfung zur Algebra ohne Erfolg teilgenommen, sind Sie ebenfalls zugelassen.

Hinweis zur gesamten Lehrveranstaltung: Bild- und Tonaufnahmen sowie die unautorisierte Verbreitung von Vorlesungsmitschriften insbesondere im Internet sind aus urheberrechtlichen und didaktischen Gründen nicht gestattet.

Hinweise zum Bearbeiten der Übungsaufgaben:

1. Beschäftigen Sie sich bereits *ab dem Ausgabetag* mit den Übungsaufgaben.
2. Schlagen Sie in Ihrer Vorlesungsmitschrift sowie einem Lehrbuch die exakte Bedeutung der verwendeten Fachbegriffe nach. Verdeutlichen Sie sich die Aussagen durch *Beispiele* und *Spezialfälle*.
3. *Diskutieren* Sie mit Ihren Kommilitonen über die Aufgaben. Es ist eine vorzügliche Idee, kleine Arbeitsgruppen zur Bearbeitung der Aufgaben zu bilden.
4. Schreiben Sie Ihre Lösungen in *korrekten und vollständigen deutschen Sätzen* auf! Die Verwendung von logischen Symbolen wie $\forall, \exists, \Leftrightarrow$ ist im Fließtext grundsätzlich unzulässig! In abgesetzten Formeln sind diese erlaubt.
5. Wenn Sie eine Gleichheit $X = Y$ von Mengen zeigen wollen, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Inklusion $X \subset Y$ und $Y \subset X$ verifizieren.
6. Wollen Sie beweisen, dass „ A genau dann gilt, wenn B gilt“, müssen Sie in der Regel in getrennten Argumenten die Implikation „wenn A , dann B “ sowie „wenn B , dann A “ zeigen! (Ersteres besagt, dass B *notwendig* für A ist, während Letzteres bedeutet, dass B *hinreichend* für A ist.)
7. Die Aussage „wenn A , dann B “ ist äquivalent zur Aussage „wenn B nicht gilt, dann gilt A nicht“.
8. Wollen Sie zeigen, dass eine Aussage falsch ist, reicht es, ein *einziges Gegenbeispiel* anzugeben! Aus Bequemlichkeit wähle man dieses so einfach wie möglich.
9. Wenn Sie Resultate *aus der Vorlesung zitieren* wollen, schreiben Sie beispielsweise: „Wegen Vorlesung, Proposition 3.12 gilt...“
10. Alle Abgaben müssen *handschriftlich*, individuell, und ohne elektronische Hilfsmittel verfasst sein.
11. Verwenden Sie *Deckblatt* und *Heftklammern* für Ihre Abgaben!

Die Korrektoren sind angewiesen, bei Nichtbeachtung von Hinweis 4 pro Aufgabe einen Punkt abzuziehen.