Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer SS 2025

Übungen zur Algebra

Blatt 3

Aufgabe 1. Welche der folgende Teilmengen H_i in der Gruppe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ sind Untergruppen? Welche sind Normalteiler?

(i) Die Menge H_1 aller Matrizen A mit $\det(A) > 0$.

(ii) Die Menge H_2 aller Matrizen $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mit Einträgen $a, b, c, d > 0$.

(iii) Die Menge H_3 aller Matrizen A wie oben mit $a = 0$.

(iv) Die Menge H_4 aller Matrizen A wie oben mit $c = 0$.

(v) Die Menge H_5 aller invertierbaren symmetrischen Matrizen.

Aufgabe 2. Wir betrachten die zyklischen Gruppen $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Zeigen Sie

$$C_2 \times C_3 \simeq C_6 \quad \text{und} \quad C_3 \times C_3 \not\simeq C_9.$$

Aufgabe 3. Sei G eine Gruppe, X eine G-Menge, und $Z \subset X$ eine Teilmenge. Man bezeichnet

$$C_G(Z) = \{\sigma \in G \mid \sigma \cdot z = z \text{ für alle } z \in Z\}$$

als den *Zentralisator*, und

$$N_G(Z) = \{\sigma \in G \mid \sigma(Z) = Z\}$$

als den *Normalisator* von Z in G.

(i) Verifizieren Sie, dass es sich um Untergruppen handelt, und dass $C_G(Z)$ ein Normalteiler von $N_G(Z)$ ist. Der resultierende Quotient $W = N_G(Z)/C_G(Z)$ wird auch *Weyl-Gruppe* genannt.

(ii) Sei nun $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, und $X = G$ bezüglich der Konjugationswirkung, und Z die Untergruppe aller Diagonalmatrizen. Berechnen Sie Zentralisator, Normalisator, sowie die Weyl-Gruppe.

Aufgabe 4. Sei G eine Gruppe und N ein Normalteiler.

(i) Zeigen Sie, dass die Quotientengruppe G/N abelsch ist genau dann, wenn für alle $a, b \in G$ der *Kommutator* $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ in N liegt.

(ii) Folgern Sie, dass es unter allen Normalteilern $N \subset G$ mit abelschen Quotienten ein kleinstes N_0 gibt.

Abgabe: Bis Montag, den 28. April um 8:25 Uhr im Zettelkasten.