Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Prof. Dr. Stefan Schröer

SS 2025

Übungen zur Algebra

Blatt 4

Aufgabe 1. Sei K ein Körper. Finden Sie für die spezielle lineare Gruppe $N = \mathrm{SL}_n(K)$ in $G = \mathrm{GL}_n(K)$ ein Komplement H, und beschreiben Sie für das resultierende semidirekte Produkt $G = N \rtimes_\varphi H$ den Homomorphismus

$$\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathrm{SL}_n(K)), \quad S \longmapsto (A \mapsto SAS^{-1}).$$

Aufgabe 2. Wir betrachten die alternierende Gruppe $G = A_4$.

(i) Zeigen Sie, dass es genau eine Untergruppe $N \subset G$ von Ordnung vier gibt. Deduzieren Sie, dass N normal ist.

(ii) Bestimmen Sie alle $\sigma \in G$ mit $\mathrm{ord}(\sigma) = 3$ sowie alle Untergruppen $H \subset G$ mit $|H| = 3$.

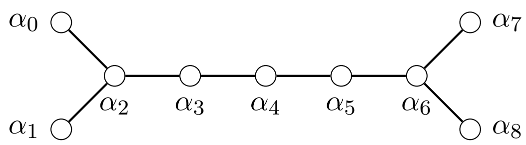
(iii) Folgern Sie, dass die Gruppe $G = A_4$ isomorph zu einem semidirekten Produkt $\mathbb{F}_2^{\oplus 2} \rtimes_\varphi C_3$ ist.

Aufgabe 3. Wir betrachten die symmetrische Gruppe $G = S_n$, wobei $n = 2p - 1$ für eine Primzahl $p > 0$.

(i) Bestimmen Sie alle p-Gruppen $H \subset G$.

(ii) Zeigen Sie durch ein direktes Argument, dass all diese H zueinander konjugiert sind.

Aufgabe 4. Wir betrachten den folgenden Graphen Γ mit neun Ecken:



Seine Automorphismengruppe $H = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ besteht aus den Permutationen der Eckenmenge $X = \{\alpha_0, \ldots, \alpha_8\}$, welche Kanten in Kanten überführen. Geben Sie alle Element $\sigma \in H$ in Zyklenschreibweise an und bestimmen Sie deren Ordnungen.

Abgabe: Bis Montag, den 5. Mai um 8:25 Uhr im Zettelkasten.