

Klausur zur Vorlesung Algebra

Erste Klausur am 24. Juli 2025

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

- Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.
- Anderes mitgebrachte Papier, Bücher, elektronische Geräte etc. bleiben während der gesamten Prüfung verstaut.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis sichtbar aus und tragen Sie oben Ihre Daten ein.
- Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie Ihre Antworten.
- Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

1	2	3	4	5	Summe	Note

Aufgabe 1. Sei $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Welche der folgenden Teilmengen $H_i \subset G$ sind Untergruppen? Welche sind Normalteiler?

- (i) Die Menge H_1 aller Matrizen mit Determinante aus $\mathbb{R}_{>0}$.
- (ii) Die Menge H_2 aller invertierbaren oberen Dreiecksmatrizen.
- (iii) Die Menge H_3 aller invertierbaren anti-symmetrischen Matrizen.

Aufgabe 2. Wir betrachten die Gruppe $G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_q)$ über einem endlichen Körper $k = \mathbb{F}_q$ von Charakteristik $p > 0$. Geben Sie zwei p -Sylow-Gruppen $H \neq H'$ an. Zeigen Sie weiterhin, dass diese Untergruppen nicht-normal und nicht-kommutativ sind.

Aufgabe 3. (i) Wie lautet die Definition von euklidischen Ringen?

(ii) Verifizieren Sie, dass das Polynom $P(T) = 31T^5 - 35T^4 + 25T + 180$ im Ring $\mathbb{Z}[T]$ primitiv und prim ist.

Aufgabe 4. Sei $L = K(\omega)$ eine Körpererweiterung vom Grad $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass es eine Erweiterung $L \subset E$ vom Grad

$$[E : L] \leq (n - 1)!$$

gibt so, dass $K \subset E$ normal ist.

Aufgabe 5. Sei $K \subset E$ eine Galois-Erweiterung vom Grad $[E : K] = 49$, deren Galois-Gruppe $G = \mathrm{Gal}(E/K)$ nicht zyklisch ist. Bestimmen Sie die Anzahl $r \geq 1$ der Zwischenkörper

$$K \subset L_1, \dots, L_r \subset E$$

sowie die Gruppen $G_i = \mathrm{Gal}(E/L_i)$.