

Klausur zur Vorlesung Algebra

Zweite Klausur am 29. September 2025

Name:

Vorname:

Matrikelnummer:

Studiengang:

- Einziges erlaubtes Hilfsmittel: Ein DIN-A4-Blatt handschriftliche Notizen.
- Anderes mitgebrachte Papier, Bücher, elektronische Geräte etc. bleiben während der gesamten Prüfung verstaut.
- Legen Sie einen Lichtbildausweis sichtbar aus und tragen Sie oben Ihre Daten ein.
- Schreiben Sie auf jedes abgegebene Blatt Ihren Namen.
- Begründen Sie Ihre Antworten.
- Pro Aufgabe sind 10 Punkte erreichbar.
- Bearbeitungszeit: 120 Minuten.

1	2	3	4	5	Summe	Note

Aufgabe 1. Sei G eine endliche Gruppe und $H \subset G$ eine Untergruppe. Wir betrachten die Teilmengen

$$C = \{\sigma \in G \mid \sigma\eta\sigma^{-1} = \eta \text{ f\"ur jedes } \eta \in H\}$$

sowie

$$N = \{\tau \in G \mid \tau\eta\tau^{-1} \in H \text{ f\"ur jedes } \eta \in H\}.$$

Zeigen Sie, dass $C, N \subset G$ Untergruppen sind, und dass $C \subset N$ ein Normalteiler ist.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die alternierende Gruppe A_4 isomorph zu einem semidirekten Produkt $\mathbb{F}_2^{\oplus 2} \rtimes_{\varphi} C_3$ ist. Geben Sie dabei ein geeignetes $\varphi : C_3 \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{F}_2)$ an.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jeder endliche Körper K isomorph zu $\mathbb{Z}[T]/\mathfrak{m}$ für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ im Polynomring $\mathbb{Z}[T]$ ist.

Aufgabe 4. Sei $p > 0$ eine Primzahl. Bestimmen Sie die $s \geq 1$ für welche der endliche Körper $L = \mathbb{F}_{p^s}$ genau sechs Unterkörper $K_1, \dots, K_6 \subset L$ hat.

Aufgabe 5. Sei $K \subset E$ eine Galois-Erweiterung vom Grad $[E : K] = 121$, deren Galois-Gruppe $G = \text{Gal}(E/K)$ nicht zyklisch ist. Bestimmen Sie die Anzahl $r \geq 1$ der Zwischenkörper

$$K \subset L_1, \dots, L_r \subset E$$

sowie die Gruppen $G_i = \text{Gal}(E/L_i)$.