

Übungen zu Kommutativer Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 1

Aufgabe 1. Sei $R \neq 0$ ein Ring. Zeigen Sie, dass die affine Gerade

$$\mathbb{A}_R^1 = \operatorname{Spec}(R[T])$$

unendlich viele Punkte enthält.

Aufgabe 2. Beschreiben Sie die stetige Abbildung

$$X = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[T]) \xrightarrow{f} \operatorname{Spec}(\mathbb{Q}[T]) = Y,$$

welche durch die kanonische Inklusion $\mathbb{Q}[T] \subset \mathbb{C}[T]$ gegeben wird, indem Sie Bilder und Urbilder der Punkte angeben.

Aufgabe 3. Sei R ein faktorieller Ring, und $X \subset \operatorname{Spec}(R)$ der Unterraum aller primen Hauptideale. Beschreiben Sie die Zariski-Topologie auf X , indem Sie ein Repräsentantensystem von Primelementen $p_\lambda \in R$, $\lambda \in L$ heranziehen.

Aufgabe 4. Sei A eine $n \times n$ -Matrix über einem Körper K , und

$$R = \left\{ \sum_{i=0}^r \lambda_i A^i \mid \lambda_i \in K \text{ und } r \geq 0 \right\} \subset \operatorname{Mat}_n(K)$$

die davon erzeugte Unteralgebra. Beschreiben Sie $X = \operatorname{Spec}(R)$ mithilfe des charakteristischen Polynoms $\chi_A(T)$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 23. April um 11:00 Uhr im Briefkasten des Lehrstuhls.