

Übungen zu Kommutativer Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 2

Aufgabe 1. Sei K ein Körper und $R = K[[T]]$ der formale Potenzreihenring. Zeigen Sie, dass $X = \operatorname{Spec}(R)$ genau zwei Punkte σ, η enthält, und beschreiben Sie die Zariski-Topologie.

Aufgabe 2. Sei $R_n, n \geq 0$ eine Folge von Ringen, alle verschieden vom Nullring. Beweisen Sie, dass die disjunkte Vereinigung

$$X = \bigcup_{n \geq 0} \operatorname{Spec}(R_n)$$

nicht homöomorph zum Spektrum eines Rings sein kann.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, $\varphi : R \rightarrow R$ ein Automorphismus, und $f : X \rightarrow X$ der induzierte Homöomorphismus von $X = \operatorname{Spec}(R)$. Wir betrachten das von den $g - \varphi(g), g \in R$ erzeugte Ideal $\mathfrak{a} \subset R$, und die resultierende abgeschlossene Menge $Z = V(\mathfrak{a})$. Zeigen Sie, dass

$$f(Z) \subset Z \quad \text{and} \quad f|_Z = \operatorname{id}_Z.$$

Aufgabe 4. Sei R ein Ring, in dem es nur endlich viele Primideale $\mathfrak{p}$ gibt, von denen jedes ein maximales Ideal ist. Folgern Sie, dass der topologische Raum $X = \operatorname{Spec}(R)$ diskret ist.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 30. April um 11:00 Uhr im Briefkasten des Lehrstuhls.