

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 3

Aufgabe 1. Sei $\varphi : R' \rightarrow R$ ein Homomorphismus von Ringen. Beweisen oder widerlegen Sie:

- (i) Das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{m})$ eines maximalen Ideals $\mathfrak{m} \subset R$ ist maximal.
- (ii) Das Urbild $\varphi^{-1}(\mathfrak{a})$ eines Radikalideals $\mathfrak{a} \subset R$ ist radikal.
- (iii) Für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}' \subset R'$ ist das Ideal $\sum_{f' \in \mathfrak{m}'} R\varphi(f')$ maximal.
- (iv) Für ein Radikalideal $\mathfrak{a}' \subset R'$ ist das Ideal $\sum_{f' \in \mathfrak{a}'} R\varphi(f')$ radikal.

Aufgabe 2. Sei $\mathfrak{a} \subset R$ ein Ideal, dessen Radikal $\mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{a}}$ von endlich vielen Elementen $f_1, \dots, f_r$ erzeugt wird. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{b}^n \subset \mathfrak{a}$ für ein $n \geq 0$.

Aufgabe 3. (i) Sei X das Spektrum eines Rings R , und Z_λ , $\lambda \in L$ eine Familie von abgeschlossenen Mengen. Beschreiben Sie das Radikalideal zur abgeschlossenen Menge

$$Z = \overline{\bigcup_{\lambda \in L} Z_\lambda}.$$

(ii) Sei nun $f : X \rightarrow X'$ die stetige Abbildung zu einem Ringhomomorphismus $\varphi : R' \rightarrow R$, und $Z \subset X$ eine abgeschlossene Menge. Beschreiben Sie das Radikalideal zur abgeschlossenen Menge

$$Z' = \overline{f(Z)}.$$

Aufgabe 4. Sei R ein Ring, $\mathfrak{a}$ ein Ideal, f ein Ringelement, und T eine Unbestimmte. Beweisen Sie

$$f \in \sqrt{\mathfrak{a}} \iff \mathfrak{a} + (1 - fT) = R[T].$$

Abgabe: Bis Donnerstag, den 7. Mai um 11:00 Uhr im Briefkasten des Lehrstuhls.