

Übungen zu Kommutativer Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 4

Aufgabe 1. Wir betrachten den Unterring

$$R \subset \mathbb{C}[T_1] \times \mathbb{C}[T_2]$$

aller Paare (P, Q) mit $P(0) = Q(0)$. Zeigen Sie, dass $Y = \operatorname{Spec}(R)$ zusammenhängend ist, und aus zwei irreduzible Komponenten Y_1, Y_2 besteht.

Aufgabe 2. Sei K ein Körper, $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$ eine trigonalisierbare Matrix, und $R = K[A]$ der davon erzeugte Unterring. Wie hängt der Zusammenhang des Raumes $X = \operatorname{Spec}(R)$ mit der Jordan–Normalform der Matrix A zusammen?

Aufgabe 3. Sei R ein integrier Ring und $F = \operatorname{Frac}(R)$ sein Körper der Brüche. Angenommen, für alle Ringelemente $f, g \neq 0$ gilt $f/g \in R$ oder $g/f \in R$. Man spricht dann von einem *Bewertungsring*. Zeigen Sie, dass der topologische Raum $X = \operatorname{Spec}(R)$ durch die Ordnungsrelation

$$x \leq y \iff x \in \overline{\{y\}}$$

total geordnet ist, und die Halbgeraden $U =]x, \infty[$ eine Basis für die Zariski-Topologie bilden.

Aufgabe 4. Sei X ein topologischer Raum und

$$X^{\operatorname{sob}} = \{\zeta_Z \mid Z \subset X \text{ irreduzibel und abgeschlossen}\}$$

der assoziierte nüchterne Raum. Zeigen sie die universelle Eigenschaft der durch $f(x) = \zeta_{\overline{\{x\}}}$ gegebenen stetigen Abbildung $f : X \rightarrow X^{\operatorname{sob}}$: Zu jeder stetigen Abbildung $g : X \rightarrow Y$ in einen nüchternen Raum Y gibt es genau eine stetige Abbildung $g_0 : X^{\operatorname{sob}} \rightarrow Y$, welche das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & & X^{\operatorname{sob}} \\ & \nearrow f & \downarrow g_0 \\ X & & Y \\ & \searrow g & \end{array}$$

kommutativ macht.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 21. Mai um 11:00 Uhr im Briefkasten des Lehrstuhls.