

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 5

Aufgabe 1. (i) Sei S das von einer Primzahl $p > 0$ erzeugte multiplikative System, und $M = (S^{-1}\mathbb{Z})/\mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass dieser Modul über dem Ring $R = \mathbb{Z}$ artinsch, aber nicht noethersch ist.

(ii) Sei $X = \{x_0, x_1, \dots\}$ eine abzählbar unendliche Menge. Finden Sie darauf eine Topologie so, dass der Raum artinsch aber nicht noethersch ist.

Aufgabe 2. Sei $R \subset A$ eine Ringerweiterung, wobei der zugrundeliegende R -Modul von A frei ist, also isomorph zu einem $\bigoplus_{i \in I} R$ ist. Zeigen Sie, dass R noethersch oder artinsch ist, sofern A die entsprechende Eigenschaft besitzt.

Aufgabe 3. Sei R ein Ring, $\mathfrak{a}$ ein Ideal, und $f \in R$. Angenommen, die Ideale

$$\mathfrak{a} + Rf \quad \text{und} \quad (\mathfrak{a} : Rf)$$

sind endlich erzeugt. Folgern Sie, dass dann $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt sein muss.

Aufgabe 4. Gegeben sei ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} M_1 & \longrightarrow & M_2 & \longrightarrow & M_3 & \longrightarrow & M_4 & \longrightarrow & M_5 \\ \varphi_1 \downarrow & & \varphi_2 \downarrow & & \varphi_3 \downarrow & & \varphi_4 \downarrow & & \varphi_5 \downarrow \\ N_1 & \longrightarrow & N_2 & \longrightarrow & N_3 & \longrightarrow & N_4 & \longrightarrow & N_5 \end{array}$$

von R -Moduln, dessen Zeilen exakt sind. Verifizieren Sie die folgende Form des sogenannten *Fünfer-Lemmas*:

- (i) Ist φ_1 surjektiv und sind φ_2, φ_4 injektiv, so ist auch φ_3 injektiv.
- (ii) Ist φ_5 injektiv und sind φ_2, φ_4 surjektiv, so ist auch φ_3 surjektiv.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 28. Mai um 11:00 Uhr im Briefkasten des Lehrstuhls.