

Übungen zu Kommutativer Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 6

Aufgabe 1. Sei k ein Körper, und $\varphi : R' \rightarrow R$ ein Homomorphismus von endlich erzeugten k -Algebren. Zeigen Sie, dass die induzierte Abbildung

$$f : X = \operatorname{Spec}(R) \longrightarrow \operatorname{Spec}(R') = X'$$

abgeschlossenen Punkte auf abgeschlossenen Punkte abbildet. Zeigen Sie mit einem Beispiel, dass diese Eigenschaft im allgemeinen nicht gilt.

Aufgabe 2. Verifizieren Sie mit dem Nakayama-Lemma, dass ein Ring R genau dann ein Körper ist, wenn er noethersch ist, es nur ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ gibt, und $\dim_{\kappa}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = 0$ gilt.

Aufgabe 3. Seien $f_1, \dots, f_r \in R$ endlich viele Ringelemente und $S \subset R$ das davon erzeugte multiplikative System. Zeigen Sie, dass die R -Algebra $A = S^{-1}R$ vom endlichen Typ ist, im allgemeinen jedoch nicht endlich ist.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring. Beweisen Sie, dass ein Ideal $\mathfrak{p}$, welches maximal unter allen nicht-endlich erzeugten Idealen $\mathfrak{a}$ ist, prim sein muss. Nehmen Sie dazu an, dass $fg \in \mathfrak{p}$ aber $f, g \notin \mathfrak{p}$, betrachten Sie die Ideale

$$\mathfrak{p} + Rf \quad \text{und} \quad (\mathfrak{p} : Rf),$$

und wenden Sie Aufgabe 3 vom Blatt 5 an.

Abgabe: Bis Freitag, den 4. Juni um 11:00 Uhr im Briefkasten des Lehrstuhls.