

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 7

Aufgabe 1. Seien $\varphi : R \rightarrow A$ ein Homomorphismus zwischen lokalen Ringen. Verifizieren Sie, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind:

- (i) $\varphi(\mathfrak{m}_R) \subset \mathfrak{m}_A$.
- (ii) $\mathfrak{m}_R \subset \varphi^{-1}(\mathfrak{m}_A)$.
- (iii) $\mathfrak{m}_R = \varphi^{-1}(\mathfrak{m}_A)$.
- (iv) $\varphi^{-1}(A^\times) \subset R^\times$.
- (v) $\varphi^{-1}(A^\times) = R^\times$.

Geben Sie ein Beispiel, wo diese Eigenschaft nicht gilt.

Aufgabe 2. Sei R ein Ring, S ein multiplikatives System, und M, N zwei Modulen über $S^{-1}R$. Zeigen Sie, dass die kanonische Inklusion

$$\mathrm{Hom}_{S^{-1}R}(M, N) \subset \mathrm{Hom}_R(M, N)$$

eine Gleichheit ist.

Aufgabe 3. Sei R ein integrierter noetherscher Ring, $F = \mathrm{Frac}(R)$ der Körper der Brüche, und M ein endlich erzeugter R -Modul. Zeigen Sie, dass für gewisse Ringelemente $f \neq 0$ die Lokalisierung M_f ein freier R_f -Modul wird, also isomorph zu einem $(R_f)^n$ ist.

Aufgabe 4. Sei R ein Ring und $e \in R$ ein idempotentes Element. Zeigen Sie, dass die Lokalisierungsabbildung

$$R \longrightarrow R[1/e] \quad f \longmapsto f/1$$

surjektiv ist, und beschreiben Sie den Kern.

Abgabe: Bis Freitag, den 11. Juni um 11:00 Uhr im Briefkasten des Lehrstuhls.