

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 8

Aufgabe 1. Sei X ein topologischer Raum und $G \neq \{0\}$ eine abelsche Gruppe. Wir definieren eine abelsche Prägarbe durch

$$\Gamma(U, \mathcal{G}) = \begin{cases} G & \text{wenn } U \text{ nichtleer;} \\ \{0\} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dabei sind die Restriktionsabbildungen für Inklusionen $U \subset V$ nichtleerer offener Mengen $\text{res}_U^V = \text{id}_G$. Unter welchen Voraussetzungen an den Raum X gilt das Garbenaxiom?

Aufgabe 2. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung von topologischen Räumen, und $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe auf X . Wir definieren eine abelsche Prägarbe $f_*(\mathcal{F})$ auf Y durch

$$\Gamma(V, f_*(\mathcal{F})) = \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{F}),$$

mit Restriktionsabbildungen $\text{res}_U^V = \text{res}_{f^{-1}(U)}^{f^{-1}(V)}$. Verifizieren Sie, dass $f_*(\mathcal{F})$ das Garbenaxiom erfüllt.

Aufgabe 3. Ein *Homomorphismus* $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ von abelschen Garben auf einem topologischen Raum X ist eine Kollektion von Gruppenhomomorphismen $\varphi_U : \Gamma(U, \mathcal{F}) \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{G})$, welche kompatibel mit Restriktionsabbildungen sind. Angenommen, zu jedem Punkt a und jeder offenen Umgebung V gibt es ein $U \subset V$ so, dass φ_U bijektiv ist. Folgern Sie, dass φ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 4. Sei R eine Menge, versehen mit einer Präordnungsrelation $f \preccurlyeq g$, mit anderen Worten

$$f \preccurlyeq f \quad \text{und} \quad f \preccurlyeq g, g \preccurlyeq h \Rightarrow f \preccurlyeq h.$$

Fassen Sie $(R, \preccurlyeq)$ als Kategorie $\mathcal{C}$ auf, analog zur Kategorie der offenen Mengen eines topologischen Raumes. Wie lassen sich die Ordnungsrelationen $f \leq g$ unter den Präordnungsrelationen $f \preccurlyeq g$ durch Eigenschaften der Kategorie $\mathcal{C}$ charakterisieren?

Abgabe: Bis Freitag, den 18. Juni um 11:00 Uhr im Briefkasten des Lehrstuhls.