

Übungen zu Kommutativer Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 9

Aufgabe 1. Verifizieren Sie, dass ein Ring R lokal ist genau dann, wenn das Komplement der Einheitengruppe $R^\times$ ein Ideal $\mathfrak{a}$ ist, und dass in diesem Fall $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_R$ gilt.

Aufgabe 2. Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine abelsche Garbe, und U eine offene Menge. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) \longrightarrow \prod_{a \in U} \mathcal{F}_a, \quad s \longmapsto (s_a)_{a \in U}$$

injektiv ist.

Aufgabe 3. Sei $(L, \leq)$ eine geordnete Menge, $M_\lambda, f_{\lambda, \mu}$ ein inverses System, und $N_\lambda, g_{\lambda, \mu}$ ein direktes System von Mengen, indiziert durch L . Finden Sie die universelle Eigenschaften vom inversen beziehungsweise direkten Limes

$$\varprojlim_{\lambda \in L} M_\lambda \quad \text{und} \quad \varinjlim_{\lambda \in L} N_\lambda.$$

Aufgabe 4. Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal-geringter Raum. Zeigen Sie, dass es genau einen Morphismus

$$(f, \varphi) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (\operatorname{Spec} \mathbb{Z}, \tilde{\mathbb{Z}})$$

gibt. Beschreiben Sie für jeden Punkt $x \in X$ das Bild $f(x) \in \operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ mittels einer Eigenschaft des Restekörpers $\kappa(x)$.

Abgabe: Bis Donnerstag, den 25. Juni um 11:00 Uhr im Briefkasten des Lehrstuhls.