

Übungen zu Kommutative Algebra und Algebraische Geometrie

Blatt 11

Aufgabe 1. Sei k ein Grundkörper, $P = P(T_1, \dots, T_n)$ ein Polynom, und

$$X = \operatorname{Spec}(k[T_1, \dots, T_n]/(P))$$

das resultierende affine Schema. Verifizieren Sie, dass die Menge $X(F)$ der Morphismen $\operatorname{Spec}(F) \rightarrow X$ den F -wertigen Lösungen der algebraischen Gleichung

$$P(T_1, \dots, T_n) = 0$$

entsprechen. Hierbei durchläuft F die Körpererweiterungen von k .

Aufgabe 2. Sei k ein Grundkörper, F_i eine Folge von Körpern, und

$$X = \bigcup_{i=0}^{\infty} \operatorname{Spec}(F_i)$$

die disjunkte Vereinigung der Spektren.

- (i) Zeigen Sie, dass X lokal noethersch aber nicht quasikompakt ist.
- (ii) Unter welchen Bedingungen an die Körpererweiterungen $k \subset F_i$ ist das Schema X lokal vom endlichen Typ?
- (iii) Beweisen Sie, dass die k -Algebra $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ nicht vom endlichen Typ ist.

Aufgabe 3. Sei k ein Grundkörper und $V = \mathbb{A}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ die punktierte affine Ebene. Berechnen Sie mit dem Garbenaxiom den Ring $\Gamma(V, \mathcal{O}_V)$ und folgern Sie, dass das Schema V nicht affin ist.

Aufgabe 4. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Morphismen vom endlichen Typ zwischen Schemata. Zeigen Sie, dass die Verkettung $g \circ f$ ebenfalls vom endlichen Typ ist.

Abgabe: Bis Freitag, den 9. Juli um 11:00 Uhr im Briefkasten des Lehrstuhls.