Über die algebraische K- und L-Theorie von Mackeykategorien

Diplomarbeit

vorgelegt von
Stefan Schröer
aus
Hamburg

angefertigt am
Mathematischen Institut
der
Georg–August–Universität zu Göttingen
1993

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In dieser Arbeit werden Aspekte einer Kategorie untersucht, die in der Theorie der Transformationsgruppen eine fundamentale Rolle spielt: die Mackeykategorie Ω_G zu einer Gruppe G (siehe Abschnitt 1.4). Der Einfachheit halber beschränken wir uns in unseren Betrachtungen auf endliche Gruppen G. In der Mackeykategorie $\Omega = \Omega_G$ zu G sind alle Daten organisiert, die die Beziehungen der Untergruppen von G betreffen. Durch Ω wird die Induktions- und Restriktionstheorie von G gesteuert: Mackeyfunktoren auf G-MENGEN sind dasselbe wie gewöhnliche Funktoren auf Ω.

Diese Arbeit beschäftigt sich nun mit dem Zusammentreffen der folgenden zwei Phänomene:

1. Die Kategorie Ω besitzt eine Dualität, die unmittelbar aus ihrer formalen Definition ersichtlich ist ("Vertauschung von Restriktion und Induktion").

2. Das Vorliegen einer Dualität in einer Kategorie ist der begriffliche Rahmen, der es gestattet, eine algebraische Theorie von quadratischen und Hermitschen Formen in der gegebenen Kategorie zu definieren, die die klassische Theorie der Formen für Ringe mit Involution verallgemeinert.

Es ist also aus rein formalen Gründen möglich, von quadratischen und Hermitschen Formen und den dazugehörigen Wittgruppen in der Mackeykategorie zu reden.

Nun erscheint es erstrebenswert, dieser formalen Theorie einen geometrischen Sinn zu geben, z. B. im Rahmen von äquivarianten Chirurgietheorien (siehe [L–M]), und die abstrakten Formen in der Kategorie Ω mit der bekannteren Theorie der Formen über Ringen mit Involutionen (z. B. Gruppenringen) in Verbindung zu bringen.

Diese Arbeit konzentriert sich nun auf das letztere. Das generelle Ziel ist es, die Wittgruppen von Ω mit Wittgruppen über Gruppenringen von Weylgruppen von Untergruppen von G in Verbindung zu setzen. Dabei wird man rasch genötigt, verallgemeinerte Wittgruppen zu untersuchen, nämlich die sogenannten L-Gruppen einer Kategorie mit Dualität [Ran4]. Ebenfalls von Interesse ist dann die algebraische K-Theorie von Ω.

Es gibt zwei Beispiele, in denen man sich für die K- oder L-Theorie von darstellungstheoretischen Objekten interessiert, die Gruppen in funktorieller Weise zugeordnet werden. Das klasische Beispiel ist der Gruppenring selbst:

$$G \mapsto K_*(\mathbb{Z}G), \quad G \mapsto L_*(\mathbb{Z}G).$$

Es wurden haupsächlich die folgenden drei Techniken angewendet, um diese Situation zu analysieren:

1. Mayer-Vietoris-Sequenzen für arithmetische Quadrate, siehe [Wall2].

2. Induktionstheorie, siehe [Dr].

3. Verallgemeinerte Pullbacks und ihre Mayer-Vietoris-Sequenzen, siehe [Kli].

Das zweite Beispiel sind die Funktorkategorien auf der Orbitkategorie Or_G, sogenannte Or_G-Moduln

$$G \mapsto K_*(\mathrm{Or}_G\text{-fpmod}),$$

siehe [Lueck]. In diesem Falle wird die EI-Eigenschaft der Orbitkategorie ausgenutzt, um Zerfällungsresultate zu erlangen.

In dieser Arbeit werden ähnliche Zerfällungresultate angestrebt. Dabei werden die obigen Techniken kombiniert. Die Untersuchung ist wie folgt strukturiert.

In Kapitel 2 wird zunächst der theoretische und begriffliche Rahmen für alles Weitere bereitgestellt: Es werden Kategorien mit Dualität eingeführt, und die sich daraus ergebene L-Theorie dargestellt, sowie die nötigen Grundlagen der algebraischen K-Theorie diskutiert. Nachdem die von den Transformationsgruppen gelieferten Kategorien, speziell die Mackeykategorie, vorgestellt wurden, wird die abstrakte Theorie auf die Mackeykategorie angewendet.

Kapitel 3 enthält eine detaillierte Analyse des einfachsten nichttrivialen Spezialfalles, nämlich $G = \mathbb{Z}/p$, p eine Primzahl. Die verwendeten Methoden sind unabhängig von den folgenden Kapiteln. Die Mackeykategorie Ω_G beziehungsweise ein ihr zugeordneter Ring wird explizit ausgerechnet und durch Pullbacks in verständlichere Teile zerlegt. Mittels Mayer-Vietoris-Sequenzen für Pullbacks werden niedrige K-Gruppen berechnet.

Die Hauptarbeit wird nun in Kapitel 4 und 5 geleistet: In Kapitel 4 wird in der Kategorie die Gruppenordnung von G invertiert. Dies führt zu einer deutlichen Strukturvereinfachung, und es wird möglich, mittels Moritaäquivalenzen für alle Gruppen G Zerfällungsresultate für die K- und L-Gruppen zu erreichen.

In Kapitel 5 wird eine analoge Technik angewendet, nämlich die Komplettierung entlang der Gruppenordnung $|G|$. In diesem Fall liefert die Reduktion nach dem Radikal zumindest für p-Gruppen analoge Zerfällungsresultate.

In Kapitel 6 werden die Resultate der vorherigen 2 Kapitel in die Maschine der Mayer-Vietoris-Sequenzen in der K- und L-Theorie eingegeben. Für p-Gruppen erlangt man ein vollständiges Zerlegungsresultat für die quadratischen L-Gruppen. Modulo 2-primärer Torsion ist dies für alle Gruppen richtig.

2 Grundlagen

2.1 Kategorien

Dieser Abschnitt enthält lediglich eine Zusammenstellung der kategoriellen Begriffe und Konstruktionen, die später benötigt werden.

Im Folgenden seien alle Kategorien klein, bis auf die offensichtlichen Ausnahmen, z. B. die Kategorie KAT der kleinen Kategorien, oder die Kategorie MENGEN der Mengen. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heiße endlich, wenn ihre Objektmenge $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ endlich ist. Die opponierte Kategorie zu $\mathcal{C}$ wird mit $\mathcal{C}^{op}$ bezeichnet.

Sei R ein Ring (worunter wir immer einen Ring mit 1 verstehen). Eine Kategorie $\mathcal{C}$ wird *R-(links-)additiv* genannt, falls die Morphismenmengen in $\mathcal{C}$ R-Linksmoduln und die Verkettungen in $\mathcal{C}$ R-bilineare Abbildungen sind. Eine $\mathbb{Z}$-additive Kategorie heißt schlicht *additiv*. Häufig wird der Bequemlichkeit halber noch gefordert, daß alle endlichen Koprodukte existieren (die in einer additiven Kategorie automatisch auch Produkte sind, siehe [Bass] S.22); wir werden den Standpunkt einnehmen, daß, wann immer Koprodukte von nöten sind, alles in $\mathcal{C}_{\amalg}$, der *universellen Kategorie mit Koprodukt* zu $\mathcal{C}$, stattfindet. Ein Modell für $\mathcal{C}_{\amalg}$ wird durch folgende Konstruktion geliefert: Objekte in $\mathcal{C}_{\amalg}$ seien Abbildungen $f : X \to \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, X eine endliche Menge. Ein Morphismus von $f : X \to \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ nach $g : Y \to \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ sei eine Abbildung $a : X \to Y$, zusammen mit Morphismen $a_x : f(x) \to g(a(x))$ in $\mathcal{C}$ für alle $x \in X$. $\mathcal{C}_{\amalg}$ ist offenbar mit allen endlichen Koprodukten ausgestattet und kommt zusammen mit einem vollen, treuen Funktor $\mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\amalg}$, $x \mapsto (\{x\} \ni x \mapsto x)$. Ist $\mathcal{C}$ R-additiv, so auch $\mathcal{C}_{\amalg}$. In der Tat repräsentiert $\mathcal{C}_{\amalg}$ den Funktor (Kategorien mit Koprodukten) $\to$ MENGEN, $\mathcal{D} \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{KAT}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$. Anders gesagt: Der Funktor $?_{\amalg}$ ist linksadjungiert zum Inklusionsfunktor (Kategorien mit Koprodukt)$\to$ KAT.

Eine Kategorie heißt *abelsch*, falls sie additiv ist, alle endlichen Koprodukte sowie alle Kerne und Kokerne besitzt, und das “1. Isomorphiegesetz der Algebra” gilt (d. h. die kanonische natürliche Transformation kokern∘kern =: kobild $\to$ bild := kern∘kokern ist ein Isomorphismus).

Zwischen den additiven und den abelschen liegen die *Karoubischen* Kategorien. Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt Karoubisch, falls sie additiv ist, und alle ihre Idempotente spalten, d. h. für jeden Idempotent $e : x \to x$ existiert ein $y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ und Morphismen $x \xrightarrow{p} y \xrightarrow{q} x$ mit $pq = \mathrm{id}_y$ und $qp = e$. Jede Kategorie $\mathcal{C}$ besitzt einen projektiven Abschluß $\mathbb{P}\mathcal{C}$, in dem alle Idempotente spalten: Objekte in $\mathbb{P}\mathcal{C}$ seien die Idempotente in C, und Morphismen zwischen $e : x \to x$ und $f : y \to y$ seien Morphismen $\psi : x \to y$ in $\mathcal{C}$ so daß $f \circ \psi = \psi \circ e$. Man überzeugt sich leicht, daß in $\mathbb{P}\mathcal{C}$ tatsächlich alle Idempotente spalten. $\mathbb{P}\mathcal{C}$ kommt einher mit einem vollen, treuen Funktor $\mathcal{C} \to \mathbb{P}\mathcal{C}$, $x \mapsto \mathrm{id}_x$. Ist $\mathcal{C}$ R-additiv, so auch $\mathbb{P}\mathcal{C}$. Wiederum repräsentiert $\mathbb{P}\mathcal{C}$ den Funktor (Karoubische Kategorien) $\to$ MENGEN, $\mathcal{D} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{KAT}}(\mathcal{D}, \mathcal{C})$, und der Funktor $\mathbb{P}?$ ist linksadjungiert zum entsprechenden Inklusionsfunktor.

Eine weitere Verallgemeinerung der abelschen Kategorien sind die *exakten* Kategorien: Eine Kategorie $\mathcal{C}$ heißt exakt, falls sie eine volle Unterkategorie einer abelschen Kategorie $\mathcal{D}$ ist, die abgeschlossen unter Erweiterungen ist, welches besagt: Für exakte Sequenzen in $\mathcal{D}$

$$0 \to a \to x \to y \to 0$$

mit $a, b \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ ist auch $x \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$. Man deklariert die Morphismen $a \to b$ in $\mathcal{C}$, die in der ambienten Kategorie $\mathcal{D}$ in einer exakten Sequenz $0 \to a \to b$ sitzen, als erlaubte Monomorphismen, analog definiert man die erlaubten Epimorphismen. Exakte Kategorien spielen für Quillens Zugang zur K-Theorie via Q-Konstruktion eine fundamentale Rolle. Man beachte, daß die vorliegende Definition einer exakten Kategorie nach dem Gabriel-Quillenschen Einbettungssatz ([T-T], Appendix A) äquivalent ist zu Definitionen, die keine ambiente abelsche Kategorie benutzen.

Eine *monoidale* Kategorie ist eine Kategorie $\mathcal{C}$ mit einem kovarianten Funktor $\perp: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ zusammen mit einem Element $I \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ und geeigneten Kohärenzisomorphismen (siehe [Mac]), die sicherstellen, daß $\perp$ assoziativ und I ein Einselement "bis auf Isomorphie" ist. Gilt zusätzlich für alle $x, y \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$: $x \perp y \simeq y \perp x$ mit geeingneten Kohärenzisomorphismen, so heißt $\mathcal{C}$ kommutativ monoidal. Monoidale Kategorien bilden eine Kategorie MONKAT, deren Morphismen die natürlichen Transformationen sind, die die obigen Strukturen erhalten (siehe [Mac]). Für eine monoidale Kategorie $\mathcal{C}$ kann man leicht die Klassengruppe $K_0(\mathcal{C})$ definieren: es ist die freie abelsche Gruppe zu $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ modulo der Äquivalenzrelation $[x \perp y] \sim [x] + [y]$. Man sieht leicht ein, daß $K_0(\mathcal{C})$ den Funktor AB $\to$ MENGEN, $G \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathrm{MONKAT}}(\mathcal{C}, G)$ darstellt, G aufgefaßt als Kategorie mit Objektmenge G. Kategorien mit Koprodukten sind Beispiele für kommutative monoidale Kategorien: man nehme für $\perp$ das Koprodukt.

Beispiel 2.1 Sei R ein Ring. R, aufgefaßt als Kategorie mit Objektmenge $\{R\}$ und $\mathrm{End}_R(R) = R$, ist dann eine R-additive Kategorie. $R_{\amalg}$ ist äquivalent zur Kategorie der endlich erzeugten, freien R-Linksmoduln. Das Koprodukt in $R_{\amalg}$ macht $R_{\amalg}$ zu einer kommutativen monoidalen Kategorie. Besitzen freie R-Moduln einen wohlbestimmten Rang, so liefert dieser eine Isomorphie $K_0(R_{\amalg}) \simeq \mathbb{Z}$. (Das ist nicht immer der Fall. Beispiel: $\prod_{i=0}^{\infty} \mathbb{Z}$, der "Eilenberg-Schwindel".) Der projektive Abschluß $\mathbb{P}(R_{\amalg})$ ist äquivalent zur Kategorie R-fpmod der endlich erzeugten, projektiven R-Linksmoduln. Von nun an werden wir diese Kategorie einfach mit $\mathbb{P}R$ bezeichnen. Die opponierte Kategorie von R-fpmod ist äquivalent zur Kategorie fpmod-R der endlich erzeugten projektiven R-Rechtsmoduln. In $\mathbb{P}R$ existieren in der Regel weder Kerne noch Kokerne, die jedoch in der abelschen Kategorie R-mod aller R-Linksmoduln vorhanden sind. Da exakte Sequenzen projektiver Moduln spalten, ist $\mathbb{P}R$ eine exakte Kategorie.

Gegeben eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $x \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, so kann man die sogenannten Kommakategorien $\mathcal{C}/x$ resp. $x\backslash\mathcal{C}$ der Objekte über resp. unter x bilden: Objekte in $\mathcal{C}/x$ sind Morphismen mit Ziel x, und Morphismen zwischen $a \to x$, $b \to x$ sind kommutative Diagramme

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & x & \end{array}$$

$x\backslash C$ wird durch C^{op}/x gebildet.

Wir wollen nun das Zusammenspiel von Ring- und Kategorientheorie näher untersuchen, das für diese Arbeit eine wichtige Rolle spielen wird. Sei C eine R-additive Kategorie. Der *Kategorienring* $[C]$ zu C ist definiert als Ring aller $\mathrm{ob}(C) \times \mathrm{ob}(C)$-Matrizen, die in der $x \times y$-Koordinate ein Morphismus $F_{y,x} \in \mathrm{Hom}_C(x, y)$ besitzen und in jeder Spalte und Zeile nur endlich viele Einträge $\neq 0$ aufweisen ([Mit], §7). Die Verknüpfung in diesem Ring geschieht durch die gewöhnliche Matrizenmultiplikation. Der Ring $[C]$ besitzt als Einselement die Matrix mit den Identitäten auf der Diagonale. Er ist offenbar eine R-Algebra. Wir identifizieren nun Morphismen f in C mit der entsprechenden Matrix in $[C]$, die f als einzigen Eintrag ungleich 0 an der passenden Position aufweist. Jedes Objekt $x \in C$ liefert so ein Idempotent $\mathrm{id}_x \in [C]$. Man kann nun die Modulkategorie $[C]$-mod mit der Kategorie C-mod der additiven Funktoren $C \to \mathbb{Z}$-mod vergleichen: Es gibt einen Funktor

$$T : [C]\text{-mod} \to C\text{-mod}, \quad T(M)(x) := \mathrm{id}_x \cdot M,$$

der linksadjungiert zum Funktor

$$U : C\text{-mod} \to [C]\text{-mod}, \quad U(M) := \bigoplus_{x \in \mathrm{ob}(C)} M(x)$$

ist. Es gilt

Satz 2.2 *Ist C endlich, so ist T eine Äquivalenz.*

Beweis. Siehe [Mit], §7. □

Betrachten wir nun folgende Situation. Gegeben sei eine additive Kategorie C. Sie besitze einen *Generator* $M := x_1 \amalg \ldots \amalg x_n \in \mathrm{ob}(C)$, d. h. jedes Objekt in C ist isomorph zu einem direkten Summanden eines M^n. Sei $\tilde{C}$ die volle Unterkategorie von C mit Objektmenge $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Offenbar ist $\mathrm{End}_C(M) \simeq [\tilde{C}]$. Nun kann man Objekte in C als projektive Moduln über $\mathrm{End}_C(M) \simeq [\tilde{C}]$ auffassen: Es liegen folgende Funktoren vor, siehe [Knus]:

$$\begin{aligned} S : C \to (\mathrm{End}_C M)\text{-fpmod}, &\quad x \mapsto \mathrm{Hom}_C(x, M), \\ S' : C \to \text{fpmod-}(\mathrm{End}_C M), &\quad x \mapsto \mathrm{Hom}_C(M, x). \end{aligned}$$

Satz 2.3 *Die Funktoren S, S' sind voll und treu. Ist C projektiv abgeschlossen, so sind sie Äquivalenzen.*

Beweis. Siehe wiederum [Knus], §3. □

Man erhält also ein kommutatives Diagramm von Äquivalenzen

$$(2.3)\qquad \begin{array}{ccccc} \tilde{\mathcal{C}}\text{-fpmod} & & & & \text{fpmod-}\tilde{\mathcal{C}} \\ {\scriptstyle T}\Big\uparrow & {\scriptstyle Y}\nwarrow & & \nearrow{\scriptstyle Y'} & \Big\uparrow{\scriptstyle T'} \\ & & I\!PC & & \\ & {\scriptstyle S}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle S'} & \\ [\tilde{\mathcal{C}}]\text{-fpmod} & & & & \text{fpmod-}[\tilde{\mathcal{C}}] \end{array} \quad .$$

Hierbei sind Y und Y' die Yonedafunktoren $y \mapsto (x_i \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, x_i))$ und $y \mapsto (x_i \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(x_i, y))$. Je nach Sachlage mag es praktisch sein, die Kategorie $I\!PC$ als Modulkategorie oder als Funktorkategorie zu betrachten.

2.2 Dualität

In diesem Abschnitt wird der Begriff der *Kategorie mit Dualität* eingeführt. Er gestattet einige interessante Verallgemeinerungen der klassischen Theorie der quadratischen oder Hermitschen Formen über Ringen mit Involution.

Sei $\mathcal{C}$ eine additive Kategorie. Ein Dualitätsfunktor auf $\mathcal{C}$ besteht aus einem kontravarianten additiven Funktor $* : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ und einer natürlichen Transformation can : $\mathrm{Id} \to **$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M^* & \xrightarrow{\mathrm{id}} & M^* \\ {\scriptstyle \mathrm{can}_{M^*}}\searrow & & \swarrow{\scriptstyle (\mathrm{can}_M)^*} \\ & M^{***} & \end{array}$$

kommutiert.

Definition 2.4 *Eine* Kategorie mit Dualität *ist eine additive Kategorie zusammen mit einem Dualitätsfunktor* $(*, \mathrm{can})$ *auf ihr.*

Sei DUKAT die Kategorie der Kategorien mit Dualität. Ihre Morphismen $(\mathcal{C}_1, \mathrm{can}_1, *) \to (\mathcal{C}_2, \mathrm{can}_2, \vee)$ sind die additiven Funktoren $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ zusammen mit einem natürlichen Isomorphismus $\phi : F \circ * \to \vee \circ F$, der kohärent in dem Sinne ist, daß für ein festes $\mu = \pm 1$ und alle $M \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}_1)$ das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{F(\mathrm{can}_{1M})} & F(M^{**}) \\ {\scriptstyle \mathrm{can}_{2F(M)}}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_{M^*}} \\ F(M)^{\vee\vee} & \xrightarrow{\phi^*_M} & F(M^*)^{\vee} \end{array}$$

bis auf μ kommutiert, d. h. $\phi\,\mathrm{can}_2\,F = \mu\,\phi\,F\,\mathrm{can}_1$. F heißt dann μ-dualitätserhaltender Funktor.

Beispiel 2.5 Sei R ein Ring mit einer Involution $^- : R \to R$, d. h. $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$ und $\overline{ab} = \overline{b} \cdot \overline{a}$. Die Involution stiftet einen natürlichen Isomorphismus zwischen $\mathbb{P}R = R$-fpmod und $(\mathbb{P}R)^{op} =$ fpmod-R, so daß der Funktor Dualraum: R-fpmod $\to$ fpmod-R, $M \mapsto \mathrm{Hom}_R(M, R)$ verkettet mit diesem natürlichen Isomorphismus einen Funktor $* : \mathbb{P}R \to \mathbb{P}R$ liefert. Zusammen mit $\mathrm{can}_M : M \to M^{**}$, $x \mapsto (f \mapsto F(x))$ liefert dies nach der linearen Algebra eine Kategorie mit Dualität. Die folgenden Begriffe orientieren sich alle an diesem Spezialfall.

Sei $(\mathcal{C}, *, \mathrm{can})$ eine Kategorie mit Dualität, $M \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, $\epsilon = \pm 1$. Wir wollen M mit ϵ-quadratischen oder ϵ-Hermitschen Formen ausstatten. Der Erzeuger $T \in \mathbb{Z}/2$ operiert auf $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M^*)$ durch die ϵ-Duatitätsinvolution $T_\epsilon : \psi \mapsto \epsilon\psi^*\mathrm{can}_M$. Wie in der klassischen Theorie wird eine quadratische Form nun ein Orbit und eine symmetrische Form ein Fixpunkt sein. Im folgenden operiere die Gruppe $\mathbb{Z}/2$ trivial auf $\mathbb{Z}$.

Definition 2.6 *Eine ϵ-symmetrische Form auf M ist ein Fixpunkt der $\mathbb{Z}/2$-Operation auf* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M^*)$ *durch die ϵ-Dualitätsinvolution T_ϵ. Dies kann alternativ angesehen werden als Element in* $\mathrm{kern}\,(1 - T_\epsilon)$ *oder in* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/2)}(\mathbb{Z}, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M^*))$.

Eine ϵ-quadratische Form auf M ist ein "Orbit" dieser $\mathbb{Z}/2$-Operation. Es kann aufgefaßt werden als Element in $\mathrm{kokern}(1 - T_\epsilon)$ *oder in* $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/2)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, M^*))$.

ϵ-symmetrische Formen werden auch als ϵ-Hermitsche Formen bezeichnet. Eine ϵ-symmetrische Form (M, h) heißt nichtsingulär, falls h ein Isomorphismus ist. Eine ϵ-quadratische Form $(M, [h])$ heißt nichtsingulär, falls $(1 + T_\epsilon)h = h + \epsilon h^*\mathrm{can}_M$ nichtsingulär ist (dies ist wohldefiniert). Ein Morphismus zwischen ϵ-Hermitschen Formen (M_1, h_1) und (M_2, h_2) ist ein Morphismus $\alpha : M_1 \to M_2$, so daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "h_1"'] & M_2 \arrow[d, "h_2"] \\ M_1^* & M_2^* \arrow[l, "\alpha^*"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert. Analog ist ein Morphismus zwischen ϵ-quadratischen Formen $(M_1[h_1])$ und $(M_2, [h_2])$ ein Morphismus $\alpha : M_1 \to M_2$ mit $[\alpha^* h_2 \alpha] = [h_1]$.

Man kann also von der Kategorie der nichtsingulären ϵ-quadratischen resp. ϵ-symmetrischen Formen $\mathcal{L}_0(\mathcal{C}, \epsilon)$ respektive $\mathcal{L}^0(\mathcal{C}, \epsilon)$ sprechen. Das Koprodukt in $\mathcal{C}$ liefert ihnen die Struktur einer kommutativen monoidalen Kategorie ("orthogonale Summe"):

$$(M_1, h_1) \perp (M_2, h_2) := (M_1 \oplus M_2, h_1 \oplus h_2).$$

Man mag $\mathcal{L}_0(?,\epsilon)$ und $\mathcal{L}_0(?,\epsilon)$ als Funktoren DUKAT $\to$ MOKAT ansehen. Ein μ-dualitätserhaltender Funktor $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ induziert Funktoren $F_* : \mathcal{L}_0(\mathcal{C}_1,\epsilon) \to \mathcal{L}^0(\mathcal{C}_2,\mu\epsilon)$ resp. $\mathcal{L}_0(\mathcal{C}_1,\epsilon) \to \mathcal{L}_0(\mathcal{C}_2,\mu\epsilon)$. Zwischen $\mathcal{L}_0$ und $\mathcal{L}^0$ gibt es eine natürliche Transformation, die ϵ-Symetrisierung (wohldefiniert):

$$\begin{aligned} S_\epsilon : \mathcal{L}_0(\mathcal{C},\epsilon) &\to \mathcal{L}^0(\mathcal{C},\epsilon) \\ (M,[h]) &\mapsto (M,(1+T_\epsilon)h). \end{aligned}$$

Um Wittgruppen definieren zu können, benötigt man die hyperbolischen Funktoren

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^0(\mathcal{C},\epsilon) : \mathrm{Iso}(\mathcal{C}) &\to \mathcal{L}^0(\mathcal{C},\epsilon) \\ M &\mapsto \left(M \amalg M^*, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^*\right), \\ \mathcal{H}_0(\mathcal{C},\epsilon) : \mathrm{Iso}(\mathcal{C}) &\to \mathcal{L}_0(\mathcal{C},\epsilon) \\ M &\mapsto \left(M \amalg M^*, \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right]\right). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\mathrm{Iso}(\mathcal{C})$ die Kategorie mit den Objekten $\mathrm{ob}(\mathcal{C})$ und den Isomorphismen in $\mathcal{C}$ als Morphismen.

Definition 2.7 *Die ϵ-symmetrische Wittgruppe von $(\mathcal{C},*,\mathrm{can})$ wird definiert als Quotient der Klassengruppe $K_0(\mathcal{L}^0(\mathcal{C},\epsilon))$ modulo der Untergruppe, die vom Bild von $\mathcal{H}^0(\mathcal{C},\epsilon)$ erzeugt wird, analog die ϵ-quadratische Wittgruppe:*

$$\begin{aligned} L^0(\mathcal{C},\epsilon) &:= K_0(\mathcal{L}^0(\mathcal{C},\epsilon))/ < \mathcal{H}^0(\mathcal{C},\epsilon)(\mathrm{Iso}(\mathcal{C})) > \\ L_0(\mathcal{C},\epsilon) &:= K_0(\mathcal{L}_0(\mathcal{C},\epsilon))/ < \mathcal{H}_0(\mathcal{C},\epsilon)(\mathrm{Iso}(\mathcal{C})) > \end{aligned}$$

Der Begriff Wittgruppe und seine Verallgemeinerungen zu den höheren L-Gruppen werden zentral für diese Arbeit sein.

Der Leser mag sich überzeugen, daß für das Beispiel 2.2 der Ringe mit Involutionen alle kategoriell definierten Begriffe mit den klassischen übereinstimmen.

Es stellt sich die Frage, inwieweit man diese kategoriellen Konstrukte mit der klassischen Theorie in Verbindung bringen kann. In Satz 2.3 wurden für eine additive Kategorie $\mathcal{C}$ und einen Generator M ein Funktor $S : \mathcal{C} \to (\mathrm{End}_\mathcal{C} M)$-fpmod angegeben, der eine Äquivalenz $I\!P\mathcal{C} \xrightarrow{\simeq} (\mathrm{End}_\mathcal{C} M)$-fpmod induziert. Es stellt sich heraus, daß genau die gleich Situation für Kategorien mit Dualität vorliegt, siehe [Knus], § II.3. Sei der Generator M mit einer nichtsingulären μ-Hermitschen Form h_0 ausgestattet. Man vermag auf $\mathrm{End}_\mathcal{C} M$ eine Involution $^\circ$ zu finden,

$$f^\circ := h_0^{-1} f^* h_0, \qquad f \in \mathrm{End}_\mathcal{C} M,$$

so daß der Funktor S ein μ-dualitätserhaltener Funktor ist, und S Äquivalenzen

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(I\!P\mathcal{C},\epsilon) &\xrightarrow{\simeq} \mathcal{L}_0(\mathrm{End}_\mathcal{C} M,\mu\epsilon) \\ \mathcal{L}^0(I\!P\mathcal{C},\epsilon) &\xrightarrow{\simeq} \mathcal{L}^0(\mathrm{End}_\mathcal{C} M,\mu\epsilon) \end{aligned}$$

induziert ([Knus], Theorem 3.3.1).

2.3 Abriß der K- und L-Theorie

Dieser Abschnitt enthält eine knappe Zusammenfassung der später verwendeten K- und L-Theorie. Zunächst die K-Theorie.

K-Theorie ist die Untersuchung "homotopischer Eigenschaften" gewisser Kategorien. K-Theorie ist historisch gewachsen, und es existieren sehr unterschiedliche Definitionen für K-Gruppen. Die allgemeinste Definition ist von Waldhausen für Kategorien mit "Kofaserungen und schwachen Äquivalenzen" geliefert worden (siehe [Wald], [T-T]). Für unsere Zwecke reicht es aus, mit exakten Kategorien zu arbeiten.

Quillen definiert in [Quil] die K-Gruppen einer exakten Kategorie $\mathcal{C}$ wie folgt ("Q-Konstruktion"). Man konstruiert aus $\mathcal{C}$ die Kategorie $Q\mathcal{C}$, deren Objektmenge die von $\mathcal{C}$ ist, und als Morphismen zwischen Objekten $x, y \in \mathcal{C}$ die Äquivalenzklassen von Diagrammen

$$\begin{array}{ccc} & z & \\ \swarrow & & \searrow \\ x & & y \end{array}$$

besitzt, wobei $z \to x$ ein erlaubter Epimorphismus und $z \to y$ ein erlaubter Monomorphismus ist. Verkettung geschieht durch Pullbackbildung, welche wohldefiniert ist. Für $Q\mathcal{C}$ bilde man nun den klassifizierenden Raum $BQ\mathcal{C}$ und nehme die um 1 verschobenen Homotopiegruppen als K-Gruppen:

$$K_i(\mathcal{C}) := \pi_{i+1}(BQ\mathcal{C}).$$

Beispiel 2.8 Jedes Objekt $x \in \mathcal{C}$ liefert 2 offenbare Wege von 0 nach x, nämlich

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \\ \swarrow & & \searrow \\ 0 & & x \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} & x & \\ \swarrow & & \searrow \\ 0 & & x \end{array},$$

wobei man die Morphismen in $Q\mathcal{C}$ als 1-Simplices in $BQ\mathcal{C}$ interpretiert. Die so erhaltenen Schleifen in $BQ\mathcal{C}$ mit Grundpunkt 0 liefert einen Isomorphismus $K_0(\mathcal{C}) \to \pi_1(BQ\mathcal{C})$, siehe [Sri].

Falls $\mathcal{C} = I\!P(R)$ die Kategorie der endlich erzeugten, projektiven Moduln über einem Ring R ist, so stimmt obige Definition für $i \geq 1$ mit der "+-Konstruktion" Quillens überein:

$$K_i(I\!P(R)) := K_i(R) := \pi_i(GL(R)^+).$$

$+$ ist hier der Funktor, der $GL(R)$ in einen H-Raum verwandelt, ohne die Homologie zu ändern, siehe ebenfalls [Quil].

Die höheren K-Gruppen einer Kategorie sind in der Regel sehr mysteriös und stehen nur auf äußerst verschlungene Weise mit der gegebenen Kategorie im Zusammenhang

$(K_*(\mathbb{Z}) = ???)$. Niedrige K-Gruppen lassen sich jedoch sehr wohl einfach algebraisch interpretieren, z. B.

$$\begin{aligned} K_0(\mathcal{C}) &= \text{Klassengruppe von } \mathcal{C} \\ K_1(\mathcal{C}) &= \text{Torsionsgruppe von } \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Die Torsionsgruppe $K_1(\mathcal{C})$ einer additiven Kategorie $\mathcal{C}$ wird definiert als freie abelsche Gruppe, deren Erzeuger die Endomorphismen in $\mathcal{C}$ sind, modulo den folgenden beiden Relationen: Für eine Verkettung von Endomorphismen erhält man die Relation

$$[\phi \circ \psi] = [\phi] + [\psi],$$

und für einen Morphismus exakter Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & x & \to & y & \to & z & \to & 0 \\ & & \phi\downarrow & & \psi\downarrow & & \tau\downarrow & & \\ 0 & \to & x & \to & y & \to & z & \to & 0 \end{array}$$

die Relation

$$[\psi] = [\phi] + [\tau].$$

Die +-Konstruktion liefert für Ringe interessante homologische Interpretationen:

$$\begin{aligned} K_1(R) &= H_1(GL(A), \mathbb{Z}) \\ K_2(R) &= H_2(E(A), \mathbb{Z}) \\ K_3(R) &= H_3(\mathrm{St}(A), \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

$GL(R)$ ist die allgemeine lineare, $E(A)$ die elementare und $\mathrm{St}(A)$ die Steinberggruppe zu A. Es folgen einige Standardbeispiele von K-Gruppen.

Beispiel 2.9 Sei $A = \mathbb{F}_q$ endlicher Körper mit q Elementen. Dann ist

$$K_n(\mathbb{F}_q) = \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \\ \mathbb{Z}/(q^n - 1) & n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

siehe [Qui2].

Beispiel 2.10 Sei A Dedekindring. Man erhält

$$K_0(A) = \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}(A) = \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Cl}(A),$$

wobei $\mathrm{Pic}(A)$ die Picardgruppe von A ist, welche ja mit der Idealklassengruppe $\mathrm{Cl}(A)$ übereinstimmt ([Mil]). Ferner ist

$$K_1(A) \simeq A^* = GL_1(A),$$

da A nullteilerfrei und kommutativ ist, also eine Determinante besitzt.

Beispiel 2.11 Sei A lokal, mit maximalem Ideal m. Dann ist

$$\begin{array}{lcll} K_0(A) & \simeq & K_0(A/m) \simeq \mathbb{Z} & (\text{"Liften von Idempotenten"}) \\ K_1(A) & \simeq & A^*/[A^*, A^*] = (A^*)_{ab} & (\text{"Dieudonne-Determinante"}), \end{array}$$

siehe etwa [Sri], Beispiel 1.6.

Beispiel 2.12 Für eine exakte Kategorie induziert die Einbettung $F : \mathcal{C} \to \mathbb{P}\mathcal{C}$ Isomorphismen $K_n(F)$ für $n \geq 1$ und einen Monomorphismus $K_0(F)$; die induzierte Abbildung auf den klassifizierenden Räumen $BQ\mathcal{C} \to BQ\mathbb{P}(\mathcal{C})$ ist nämlich eine Überlagerung, siehe [T-T].

Kommen wir nun zur L-Theorie. Die L-Theorie entstand bei der Frage, ob und wie viele Mannigfaltigkeiten im Homotopietyp eines vorgegebenen Poincarédualitätsraumes vorhanden sind. Die quadratischen L-Gruppen traten als geometrisch definierte Hindernisgruppen für das Problem auf, ob eine normale Abbildung $M^n \to X$ einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit in einen Poincarédualitätsraum (für $n \geq 6$) normal bordant zu einer Homotopieäquivalenz ist, und hängen nur von $\mathbb{Z}\pi_1(X)$ ab. Die Gruppen $L_n(\mathbb{Z}\pi_1(X))$ sind Verallgemeinerungen der Wittgruppe von $\mathbb{Z}\pi_1(X)$). Siehe das Buch von Wall [Wall1] oder [M–R] für die klassische Theorie. Bei der Untersuchung und Berechnung von L-Gruppen trat rasch das Bedürfnis auf, die Theorie algebraischer zu gestalten. Dieses Programm mündete in der Definition der L-Gruppen für Kategorien mit Dualität, siehe [Ran3] und [Ran4], welche eine Verallgemeinerung der oben vorgestellten Theorie der Formen in Kategorien mit Dualität ist.

Wir werden eine sehr knappe Skizze dieser Theorie angeben, die Einzelheiten lese man in [Ran3] oder [Ran4] nach. Die generelle Philosophie ist einfach, Objekte durch Kettenkomplexe zu ersetzen (man habe den singulären Kettenkomplex eines Poincarédualitätsraumes im Hinterkopf).

Zu einer additiven Kategorie $\mathcal{C}$ liegt die additive Kategorie $\mathbb{B}\mathcal{C}$ der endlichen Kettenkomplexe und Kettenmorphismen in $\mathcal{C}$ vor. Besitzt $\mathcal{C}$ einen Dualitätsfunktor $(*, \text{can})$, so vererbt sich dieser auf die Kategorie der endlichen Kettenkomplexe $\mathbb{B}\mathcal{C}$, ebenfalls $(*, \text{can})$ genannt. Einem Kettenkomplex

$$C := \quad \cdots \to C_{r+1} \xrightarrow{d_{r+1}} C_r \xrightarrow{d_r} C_{r-1} \to \cdots$$

wird sein dualer Kettenkomplex

$$C^* := \quad \cdots \to C^*_{-r-1} \xrightarrow{d'_{-r-1}} C_{-r} \xrightarrow{d'_{-r}} C_{-r+1} \to \cdots$$

zugeordnet, wobei

$$d'_r := (d_{-r})^* : \ (C^*)_r := C^{-r} := (C_{-r})^* \to (C_{-r+1})^* =: C^{-r+1} =: (C^*)_{r-1}.$$

Die Gruppe $\mathbb{Z}/2 = \{1, T\}$ operiert bei einem gegebenen Kettenkomplex C und $\epsilon = \pm 1$ auf $\mathrm{Hom}_{\mathbb{B}C}(C^*, C)$ durch die ϵ-Dualitätsinvolution

$$T_\epsilon : \mathrm{Hom}_C(C^p, C_q) \to \mathrm{Hom}_C(C^q, C_p), \quad \psi \mapsto (-1)^{pq} \epsilon \psi^*.$$

Die Rolle von $\mathbb{Z}$ wird von der Standardauflösung des $\mathbb{Z}(\mathbb{Z}/2)$-Moduln $\mathbb{Z}$ durch freie Moduln

$$W := \quad \cdots \to \mathbb{Z}\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{1-T} \mathbb{Z}\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{1+T} \mathbb{Z}\mathbb{Z}/2 \xrightarrow{1-T} \mathbb{Z} \to 0$$

ersetzt. Wir definieren die quadratischen (resp. symmetrischen) Q-Gruppen für einen endlichen Kettenkomplex C durch

$$\begin{aligned} Q_n(C, \epsilon) &:= H_n(W \otimes_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}/2} \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}C}(C^*, C)) \\ Q^n(C, \epsilon) &:= H_n(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}\mathbb{Z}/2}(W, \mathrm{Hom}_{\mathbb{B}C}(C^*, C))). \end{aligned}$$

Man bemerkt die Analogie zu Definition 1.4. Die Rolle der nichtsingulären quadratischen (resp. symmetrischen) Formen wird nun durch die quadratischen (resp. symmetrischen) Poincarékomplexe übernommen. Ein n-dimensionaler ϵ-quadratischer (resp. ϵ-symmetrischer) Poincarékomplex ist ein n-dimensionaler Kettenkomplex $C \in \mathbb{B}C$, zusammen mit einem Element $\psi \in Q_n(C, \epsilon)$ (resp. $Q^n(C, \epsilon)$), so daß $(1 + T_\epsilon)\psi_0$ (resp. ψ_0) eine Kettenäquivalenz ist.

Man vermag nun auf der Kategorie der Poincarékomplexe eine geeignete Bordismusrelation definieren (die in der Dimension 0 gerade durch die hyperbolischen Formen geliefert wird!), und definiert die n-dimensionalen ϵ-quadratischen (resp. ϵ-symmetrischen) L-Gruppen $L_n(C, \epsilon)$ (resp. $L^n(C, \epsilon)$) als Bordismusgruppe der n-dimensionalen ϵ-quadratischen (resp. ϵ-symmetrischen) Poincarékomplexe.

L-Gruppen "mit Trägern" definiert man wie folgt. Einem endlichen Kettenkomplex C ordnet man seine reduzierte Eulercharakteristik

$$\chi(C) := \sum_{i \in \mathbb{Z}} (-1)^i [C_i] \in \tilde{K}_0(C)$$

zu. Für eine involutionsinvariante Untergruppe $X \subset \tilde{K}_0(C)$ sei $L_n^X(C, \epsilon)$ die Bordismusgruppe (Bordismen mit reduzierter Eulercharakteristik in X!) der n-dimensionalen ϵ-quadratischen Poincarékomplexe, deren reduzierte Eulercharakteristik in X liegt, analog der symmetrische Fall. Diese L-Gruppen mit unterschiedlichen Trägern unterscheiden sich höchstens um 2-primäre Torsion: Für zwei involutionsinvariante Untergruppen $X \subset Y$ von $\tilde{K}_0(C)$ steht die Rothenbergsequenz ([Ran2])

(2.13) $$\cdots \to L_n^X(C, \epsilon) \to L_n^Y(C, \epsilon) \to \hat{H}^n(\mathbb{Z}/2, Y/X) \to L_{n-1}^X(C, \epsilon) \to \cdots$$

zur Verfügung. Hierbei ist $\hat{H}^n(\mathbb{Z}/2, Y/X)$ die Tate-Kohomologie von Y/X, auf dem $\mathbb{Z}/2$ durch die Involution operiert, welche natürlich ein 2-primärer Torsionsmodul ist, siehe [Br].

Es stellt sich heraus, daß all diese Gruppen 4-periodisch sind. Durch algebraische Chirurgie (analog zur topologischen Chirurgie) kann man jeden Poincarékomplex in seiner Bordismusklasse hochzusammenhängend machen. Dies liefert Isomorphien

$$\begin{aligned} L^X_{4n}(\mathcal{C},\epsilon) &\simeq L^X_0(\mathcal{C},\epsilon) \\ L^X_{4n+1}(\mathcal{C},\epsilon) &\simeq L^X_1(\mathcal{C},\epsilon) \\ L^X_{4n+2}(\mathcal{C},\epsilon) &\simeq L^X_0(\mathcal{C},-\epsilon) \\ L^X_{4n+3}(\mathcal{C},\epsilon) &\simeq L^X_1(\mathcal{C},-\epsilon), \end{aligned}$$

analog der symmetrische Fall. Elemente in $L_0(\mathcal{C},\epsilon)$ sind die bekannten quadratischen Formen, Elemente in $L_1(\mathcal{C},\epsilon)$ sind quadratische *Formationen* (siehe [Ran3]).

Man gewinnt also bei den "höheren" L-Gruppen eigentlich keine neuen Gruppen dazu (im Gegensatz zur K-Theorie), wohl aber ein mächtiges theoretisches Werkzeug.

2.4 Transformationsgruppen

Wir beschreiben nun die Kategorien, die durch die Theorie der Transformationsgruppen geometrisch geliefert werden und uns im Verlaufe dieser Arbeit interessieren werden. Referenz: [tD1] und [tD2].

Sei G eine endliche Gruppe. Mit $S(G)$ bezeichnen wir den Untergruppenverband von G, und $\phi(G)$ sei die Menge der Konjugationsklassen von Untergruppen von G. $S(G)$ wird durch Inklusion, $\phi(G)$ durch Subkonjugation zu einer geordneten Menge. Die Orbitkategorie $\mathrm{Or}(G)$ besteht aus den homogenen Räumen und G-Abbildungen. G-MENGEN, die Kategorie der endlichen G-Mengen, ist die universelle Kategorie mit Koprodukt für $\mathrm{Or}(G)$. G-MENGEN ist mit dem Koprodukt disjunkte Summe und dem Produkt cartesisches Produkt ausgestattet. Der Burnsidering A_G ist die Klassengruppe $K_0(G\text{-MENGEN})$, mit der durch das Produkt in G-MENGEN induzierten Ringstruktur. A_G besitzt eine sehr komplizierte und widerspenstige Ringstruktur, läßt sich jedoch auf kanonische Weise in den sehr einfachen Ring $\prod_{\phi(G)} \mathbb{Z}$ einbetten: Für eine Konjugationsklasse $(H) \in \phi(G)$ erhält man die Abbildung

$$\varphi_H : A_G \to \mathbb{Z}, \quad X \mapsto \text{Anzahl der } H\text{-Fixpunkte von } X. \tag{2.14}$$

Dies ist offenbar unabhängig von der Wahl des Repräsentanten $H \in (H)$, und liefert einen injektiven Ringmorphismus

$$\prod_{\phi(G)} \varphi_H : A_G \to \prod_{\phi(G)} \mathbb{Z}, \tag{2.15}$$

dessen Kokern gerade $\prod_{\phi(G)} W_G H$ ist, siehe [tD1].

Wir kommen nun zu den Mackeyfunktoren. Wann immer man einer Gruppe in funktorieller Weise ein darstellungstheoretisches Objekt zuordnet (z. B. Burnsidering, Gruppenring, Darstellungsmonoid etc ...), stellt sich die Frage, ob man dieses Objekt nicht durch einfachere Gruppen auszurechnen vermag. Damit dies geschehen kann, muß die Zuordnung mit der internen Kombinatorik des Untergruppenverbandes $S(G)$ verträglich sein ("Doppelnebenklassenformel"). Diese Philosophie wird durch den Begriff Mackeyfunktor formalisiert ([Dr] und [tD2]), welcher erstaunlicherweise ganz einfach zu definieren ist. Gegeben sei eine Gruppe G und eine Kategorie mit Koprodukt $\mathcal{C}$. Ein Mackeyfunktor M für G ist ein Bifunktor G-MENGEN $\to \mathcal{C}$ mit den beiden Eigenschaften

1. M sendet Pullbacks zu kommutativen Diagrammen, d. h. für ein Pullback

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{F} & T \\ {\scriptstyle H}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ U & \xrightarrow{f} & V \end{array}$$

   in G-MENGEN ist das Diagram

$$\begin{array}{ccc} M(S) & \xrightarrow{F_*} & M(T) \\ {\scriptstyle H^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle h^*} \\ M(U) & \xrightarrow{f_*} & M(V) \end{array}$$

   in $\mathcal{C}$ kommutativ.

2. M respektiert Koprodukte.

Dies ist die abstrakte Formulierung der "Doppelnebenklassenformel". Ein Mackeyfunktor U ist ein Greenfunktor, falls es eine *Paarung von Mackeyfunktoren* (siehe [tD2], Kapitel IV.8)

$$M \times M \longrightarrow M$$

gibt. Entsprechend ist ein Mackeyfunktor M ein Modul über einem Greenfunktor U, falls es eine Paarung

$$U \times M \longrightarrow M$$

gibt.

Jeder Greenfunktor U mit Werten in einer additiven Kategorie erschafft sich nun eine spezielle additive Kategorie, die Greenkategorie Gr_U. Ihre Objekte sind endliche G-Mengen, und es ist

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}_U}(x, y) := U(x \times y).$$

Die Verkettung von Morphismen geschieht so:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}_U}(x,y)\times \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gr}_U}(y,z) &= U(x\times y)\times U(y\times z)\\
&\xrightarrow{(1)} U(x\times y\times y\times z)\times U(x\times y\times y\times z)\\
&\xrightarrow{(2)} U(x\times y\times y\times z)\\
&\xrightarrow{(3)} U(x\times y\times z)\\
&\xrightarrow{(4)} U(x\times z)\\
&= \mathrm{Hom}_{Gr_U}(x,z)
\end{aligned}$$

Erläuterung: (1) wird gegeben durch U^* der kanonischen Projektionen von $(x\times y)\times(y\times z)$, (2) wird von der Paarung des Greenfunktors U geliefert, (3) ist U^* der Diagonalen $x\times y\times z\to x\times y\times y\times y\times z$ und (4) wird von der kanonischen Projektion durch U_* induziert.

Tatsächlich besitzt Gr_U eine "tautologische" Dualität $(\mathrm{Gr}_U,*,\mathrm{can})$. Der kontravariante Funktor $*:\mathrm{Gr}_U\to\mathrm{Gr}_U$ sei die Identität auf den Objekten, und vermöge dem natürlichen Isomorphismus $U(x\times y)\simeq U(y\times x)$ durch

$$U(x\times y)\ni\phi\overset{*}{\mapsto}\phi\in U(y\times x)$$

auf den Morphismen definiert. $\mathrm{can}:\mathrm{id}\to **=\mathrm{id}$ ist die konstante Transformation.

Dies liefert nach Abschnitt 2 eine Theorie der Formen auf Greenkategorien. Wir werden hauptsächlich eine spezielle Greenkategorie untersuchen, nämlich die Greenkategorie zu dem universellen Greenfunktor

$$\mathcal{U}:x\mapsto K_0(G\text{-MENGEN}/x),$$

d. h. jeder G-Menge x wird der Ring der Isomorphieklassen von Diagrammen

$$\begin{array}{c} y\\ \downarrow\\ x\end{array}$$

zugeordnet. Der kontravariante Teil $\mathcal{U}_*$ des Bifunktors wird einfach durch Verkettung, der kovariante Teil $\mathcal{U}^*$ durch Pullback gegeben. Die zugehörige Greenkategorie sei $\Omega=\Omega_G$ und wird als Mackeykategorie bezeichnet. Es stellt sich heraus, daß $\mathcal{U}$ ein initales Objekt in der Kategorie der Greenfunktoren ist, und jeder Mackeyfunktor mit Werten in $\mathbb{Z}$-mod in tautologischer Weise ein Modul über $\mathcal{U}$ ist (siehe [tD2], Kapitel IV.8). Die Komposition in Ω geschieht durch Pullbacks:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & x \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a & & b \end{tikzcd} \times \begin{tikzcd}[column sep=small] & y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ b & & c \end{tikzcd} \mapsto \begin{tikzcd}[column sep=small] & & P \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & x \arrow[dl] \arrow[dr] & & y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a & & b & & c \end{tikzcd},$$

wobei also $P\simeq x\times_b y$. Wir studieren im nächsten Abschnitt diese Kategorie genauer.

2.5 Die Mackeykategorie Ω_G

Es werden nun die Details der Mackeykategorie diskutiert. Es werden zwei zueinander duale Zerlegungen der Homomorphismenmengen von Ω angegeben.

Sei G eine endliche Gruppe. Die $\mathbb{Z}$-additive Kategorie $\Omega = \Omega_G$ wird aus der Kategorie G-MENGEN konstruiert:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ob}(\Omega) &= \mathrm{ob}(G\text{-MENGEN}) = \text{Menge der Isomorphieklassen} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{endlicher } G\text{-Räume} \\
\mathrm{Hom}_\Omega(G/A, G/B) &= \text{freier } \mathbb{Z}\text{-Modul über den Isomorphismenklassen} \\
& \text{ von Diagrammen } G/A \leftarrow G/H \rightarrow G/B \\
&= K_0(G\text{-MENGEN}/(G/A \times G/B))
\end{aligned}$$

Durch die Zerlegung von Faserprodukten in Orbits erhält man folgende Formel für die Verkettung in Ω_G:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & G/H & & & & G/K & \\
a \swarrow & & \searrow b & \circ & b' \swarrow & & \searrow c \quad = \\
G/A & & G/B & & G/B & & G/C
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 & \coprod_{g \in K^{b'} \backslash B / H^b} G/H^b \cap K^{b'g} & \\
\amalg_g b^{-1}a \swarrow & & \searrow \amalg_g g^{-1}b'^{-1}c \\
G/A & & G/C
\end{array} \tag{2.16}$$

Mit dieser Notation ist gemeint, daß sich das Koprodukt über $K^{b'}gH^b \in K^{b'} \backslash G/H^b$ erstreckt. Wir verwenden die Schreibweise $H^b := b^{-1}Hb$ und ${}^bH := bHb^{-1}$. Aus obiger Konstruktion erhält Ω automatisch weitere Struktur. Ω ist nämlich sogar A_G-additiv und $\mathbb{Z}(ZG)$-additiv, d. h. Ω ist ein "Modul" sowohl über dem Burnsidering als auch über dem Gruppenring des Zentrums ZG. Der Grund: Man kann A_G als Klassengruppe der Kommakategorie G-set$/(G/G)$ über dem finalen Objekt G/G auffassen, und ZG operiert auf der Kategorie G-Set.

Die A_G-Struktur entsteht folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
A_G \times \mathrm{Hom}_\Omega(x, y) &\xrightarrow{(1)} \mathrm{Hom}_\Omega(G/G, G/G) \times \mathrm{Hom}_\Omega(x, y) \\
&\xrightarrow{(2)} \mathrm{Hom}_\Omega(G/G \times x, G/G \times y) \\
&\xrightarrow{(3)} \mathrm{Hom}_\Omega(x, y)
\end{aligned}$$

Erläuterung: (1) wird durch die Isomorphie $A_G \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_\Omega(G/G, G/G)$, $G/A \mapsto (G/G \leftarrow G/A \rightarrow G/G)$ geliefert. (2) kommt von dem Produkt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_\Omega(a, b) \times \mathrm{Hom}_\Omega(c, d) &\rightarrow \mathrm{Hom}_\Omega(a \times c, b \times d) \\
(a \leftarrow x \rightarrow b), (c \leftarrow y \rightarrow d) &\mapsto (a \times c \leftarrow x \times y \rightarrow b \times d).
\end{aligned}$$

(3) entstammt der natürlichen Isomorphie $G/G \times y \simeq y$.

Diese Festlegung ist sicherlich linear bezüglich A_G, aber auch bilinear bezüglich der Verkettung in Ω: Sei $f = (a \leftarrow x \rightarrow b) \in \mathrm{Hom}_\Omega(a,b)$, $g = (b \leftarrow y \rightarrow c) \in \mathrm{Hom}_\Omega(b,c)$, $\omega \in A_G$. Nachzuprüfen ist $\omega(f \circ g) = (\omega f) \circ g = f \circ (\omega g)$. $f \circ g$ sei durch ein Pullback in G-MENGEN

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & P \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & x \arrow[dl] \arrow[dr] & & y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a & & b & & c \end{tikzcd}$$

gegeben. Offenbar sind

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \omega \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & \omega \arrow[dl] \arrow[dr] & & G/G \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ G/G & & G/G & & G/G \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & & \omega \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & G/G \arrow[dl] \arrow[dr] & & \omega \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ G/G & & G/G & & G/G \end{tikzcd}$$

Pullbacks in G-MENGEN. Da Produkte von Pullbacks wieder Pullbacks sind, erhält man Pullbacks

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & P \times \omega \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & x \times \omega \arrow[dl] \arrow[dr] & & y \times G/G \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a \times G/G & & b \times G/G & & c \times G/G \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & & P \times \omega \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\ & x \times G/G \arrow[dl] \arrow[dr] & & y \times \omega \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a \times G/G & & b \times G/G & & c \times G/G \end{tikzcd} .$$

Dann gilt

$$f \circ (\omega g) = \left(\begin{tikzcd}[column sep=small] & x \times G/G \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a \times G/G & & b \times G/G \end{tikzcd} \right) \circ (\omega g)$$

$$= \begin{tikzcd}[column sep=small] & P \times \omega \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a \times G/G & & c \times G/G \end{tikzcd}$$

$$= \omega(f \circ g)$$

$$= \begin{tikzcd}[column sep=small] & P \times \omega \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ a \times G/G & & b \times G/G \end{tikzcd}$$

$$= (\omega f) \circ \left(\begin{tikzcd}[column sep=small] & y \times G/G \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ b \times G/G & & c \times G/G \end{tikzcd} \right)$$

$$= (\omega f) \circ g$$

Wie sieht diese Verknüpfung tatsächlich aus? Die folgende Formel lehrt, daß man nur "wie im Burnsidering" zu rechnen braucht:

$$
(2.17)\qquad
\begin{aligned}
[G/X]\left(\begin{tikzcd}[column sep=small] & G/H \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\ G/A & & G/B \end{tikzcd}\right)
&= \begin{tikzcd}[column sep=small] & G/H \times G/X \arrow[dl, "a \times 1"'] \arrow[dr, "b \times 1"] & \\ G/A \times G/G & & G/B \times G/G \end{tikzcd} \\
&= \begin{tikzcd}[column sep=small] & \coprod_{HgX} G/H \cap {}^{g}X \arrow[dl, "\amalg a \times 1"'] \arrow[dr, "\amalg b \times 1"] & \\ G/A \times G/G & & G/B \times G/G \end{tikzcd} \\
&= \begin{tikzcd}[column sep=small] & \coprod_{HgX} G/H \cap {}^{g}X \arrow[dl, "\amalg a"'] \arrow[dr, "\amalg b"] & \\ G/A & & G/B \end{tikzcd}
\end{aligned}
$$

(HgH als Index bedeutet, daß das Koprodukt über alle $HgH \in H\backslash G/H$ gebildet wird.) Das heißt, man muß nur das Produkt $G/X \times G/H$ in A_G bilden und dann mit $a, b \in G$ die G-Abbildungen auf allen Orbits von $G/X \times G/H$ bilden.

Es scheint also einen engen Zusammenhang zwischen der multiplikativen Struktur von A_G und der Kategorie Ω_G zu geben.

Kommen wir nun zur $\mathbb{Z}(ZG)$-additiven Struktur von Ω, die in einem gewissen Sinne dual zur A_G-Struktur ist. Da es für jedes $z \in ZG$ und jeden homogenen Raum G/H eine G-Abbildung $G/H \xrightarrow{z} G/H$ gibt, wird G-MENGEN zu einer ZG-Kategorie durch

$$
\begin{aligned}
ZG \times \mathrm{Hom}_G(G/H, G/K) &\to \mathrm{Hom}_G(G/H, G/K) \\
z, (G/H \to G/K) &\mapsto (G/H \to G/K \xrightarrow{z} G/K).
\end{aligned}
$$

Es spielt keine Rolle, auf welcher Seite $z \in ZG$ operiert, da für alle $g \in G$ gilt: $G/H \xrightarrow{a} G/K \xrightarrow{z} G/K = G/H \xrightarrow{z} G/H \xrightarrow{a} G/K$. Die $\mathbb{Z}(ZG)$-Struktur auf Ω entsteht durch die triviale Operation auf Objektmenge und

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z}(ZG) \times \mathrm{Hom}_\Omega(G/A, G/B) &\to \mathrm{Hom}_\Omega(G/A, G/B) \\
z,\ G/A \leftarrow G/X \to G/B &\mapsto G/A \xleftarrow{z} G/A \leftarrow G/X \to G/B
\end{aligned}
$$

mit $\mathbb{Z}$-bilinearer Fortsetzung. Die Bilinearität der Verknüpfung folgt aus der Transitivität von Pullbacks:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & P \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& G/X \arrow[dl] \arrow[dr] & (*) & G/Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
G/A \arrow[d, "z"'] & & G/B & & G/C \\
G/A & & & &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}[column sep=small]
& & P \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& G/X \arrow[dl, "z"'] \arrow[dr] & (*) & G/Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
G/X \arrow[d] & & G/B & & G/C \\
G/A & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & P \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & & G/X \arrow[dl, "z"'] \arrow[dr] & (*) & G/Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & G/X \arrow[dl] \arrow[dr] & (*) & G/B \arrow[dl, "z"'] & & G/C \\
G/A & & G/B & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
= \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & P \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
 & & G/X \arrow[dl, "z"'] \arrow[dr, phantom, "(*)"] & & G/Y \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & G/X \arrow[dl] \arrow[dr] & & G/B \arrow[dl, "z"'] & & G/C \\
G/A & & G/B & & &
\end{tikzcd}
$$

Hier markiert $(*)$ die Pullbacks.

Man kann zwei duale Zerlegungen der Morphismenmengen $\mathrm{Hom}_\Omega(G/A, G/B)$ angeben, die entweder die A_G- oder die $\mathbb{Z}(ZG)$-Struktur reflektieren. Gegeben sei ein Element $\psi = (G/A \xleftarrow{a} G/X \xrightarrow{b} G/B) \in \mathrm{Hom}_\Omega(G/A, G/B)$. Die erste Zerlegung ordnet die Morphismen nach dem Raum G/X in der Mitte ("Orbits oben") und die zweite nach dem Orbit in

$$G/A \times G/B = \coprod_{AgB \in A\backslash G/B} G/A \cap {}^gB,$$

in das $G/X \xrightarrow{a \times b} G/A \times G/B$ abgebildet wird ("Orbits unten").

Beschreibung der $\mathbb{Z}(ZG)$- Zerlegung: Seien A, B und X fixiert. Für $a \in G$ kommen nur Elemente aus

$$N_G^X(A) := N^X(A) := \{g \in G \mid {}^gA \subset X\}$$

in Frage, analog für b. Für $a' \in A$, $a \in N^X(A)$ liefern a, aa' identisch G-Abbildungen $G/X \to G/A$. Für $z \in N_G X$, dem Normalisator von X in G, erhält man eine Isomorphie von Diagrammen

$$
\begin{tikzcd}
 & G/X \arrow[dl, "a"'] \arrow[dr, "b"] & \\
G/A & & G/B \\
 & G/X \arrow[ul, "za"] \arrow[ur, "zb"'] \arrow[uu, "z"] &
\end{tikzcd}
.
$$

Definiert man

$$W(A, X, B) := B\backslash N_G^X(B) \times_{N_G X} N_G^X(A)/A, \tag{2.18}$$

so erhält man Injektionen

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{Z}W(A,X,B) & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}_\Omega(G/A,G/B) \\ b\times a & \mapsto & (G/A \overset{a}{\leftarrow} G/X \overset{b^{-1}}{\rightarrow} G/B), \end{array}$$

die eine Bijektion

$$\bigoplus_{(X)\leq(A),(B)} \mathbb{Z}W(A,X,B) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_\Omega(G/A,G/B) \tag{2.19}$$

liefern. Elemente in $\mathrm{Hom}_\Omega(G/A,G/B)$, die vom Summanden $\mathbb{Z}W(A,X,B)$ herrühren, heißen vom Typ (X). Die Projektionen auf die Morphismen vom Typ (X)

$$\psi_X := \psi_X^{A,B} : \mathrm{Hom}_\Omega(G/A,G/B) \to \mathbb{Z}W(A,X,B) \tag{2.20}$$

werde im weiteren mit ψ_X bezeichnet.

Im Spezialfall G abelsch ist natürlich $W(A,X,B) = G/(A\cap B)$. Wichtig ist die Struktur der Endomorphismenringe. Es ergibt sich eine Bijektion

$$\bigoplus_{(X)\leq(A)} \mathbb{Z}W(A,X,A) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{End}_\Omega(G/A).$$

Wegen $\mathbb{Z}W(A,A,A) \simeq \mathbb{Z}WA$ erhält man Ringmorphismen

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}WA \arrow[r, "\Delta_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}"'] & \bigoplus \mathbb{Z}W(A,X,A) \simeq \mathrm{End}_\Omega(G/A) \arrow[d, "\psi_A"] \\ & \mathbb{Z}WA \end{tikzcd} \tag{2.21}$$

Diese Ringmorphismen werden für die weitere Untersuchung fundamental sein.

Beschreibung der A_G-Zerlegung: Gegeben seien A, B und $AgB \in A\backslash G/B$ fest. Jeder Morphismus $G/X \to G/A \times G/B$ mit Bild in $G/A \cap {}^gB$ kann als Element des Burnsideringes $A_{A\cap {}^gB}$ interpretiert werden, und man erhält eine Injektion

$$\begin{array}{rcl} A_{A\cap {}^gB} & \hookrightarrow & \mathrm{Hom}_\Omega(G/A,G/B) \\ (A\cap {}^gB)/X & \mapsto & \begin{tikzcd}[column sep=small] & G/X \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, "g^{-1}"] & \\ G/A & & G/B \end{tikzcd}, \end{array}$$

insgesamt ergibt das eine Isomorphie

$$\bigoplus_{AgB} A_{A\cap {}^gB} \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_\Omega(G/A,G/B).$$

Diese Zerlegung wird von der A_G-Operation respektiert.

Die Zerlegung 2.19 in Typen ist jedoch für die weitere Untersuchung wichtiger, weil sie enger mit den Ringmorphismen in 2.21 und der Verkettung in Ω zusammenhängt. Sie hat noch eine weitere günstige Eigenschaft: Die Zerlegung

$$\mathrm{Hom}_\Omega(G/A, G/B) \simeq \bigoplus_{(X)\leq(A),(B)} \mathbb{Z}W(A,X,B)$$

ist zwar nicht invariant unter der A_G-Operation, aber in einem gewissen Sinne monoton: Für $G/H \in A_G$ gilt:

$$[G/H]\,\mathrm{Hom}_\Omega(G/A, G/B) \subset \bigoplus_{(X)\leq(A),(B),(H)} \mathbb{Z}W(A,X,B) \tag{2.22}$$

nach der Zerlegung von Produkten in Orbits. Dieses "Monotonieprinzip" wird später sehr wichtig sein.

Um die Mackeykategorie Ω mit der Ringtheorie in Verbindung zu bringen, betrachten wir die volle Unterkategorie Θ von Ω mit Objektmenge $\{G/H \mid (H) \in \phi(G)\}$ für eine feste Wahl von Repräsentanten H der Konjugationsklassen von G. Wir werden häufig den Kategorienring

$$[\Theta] \simeq \mathrm{End}_\Omega(\amalg G/H)$$

untersuchen.

3 Eine Fallstudie: $G = Z/p$

In diesem Kapitel sei p eine feste Primzahl und $G = \mathbb{Z}/p$. Es wird die Mackeykategorie $\Omega := \Omega_G$ und ihr projektiver Abschluß $\mathbb{P}\Omega$ studiert. Da die Kategorien $\mathbb{P}\Omega$ und $\mathbb{P}([\Theta])$ äquivalent sind, ist es nützlich, den Ring $[\Theta]$ zu untersuchen. Dabei steht glücklicherweise das gesamte Arsenal der Ringtheorie zur Verfügung.

Die Methode wird sein, den Ring $[\Theta]$ durch Pullbacks in einfachere Ringe zu zerlegen. Damit läßt sich in diesem Spezialfall die Kategorie $\mathbb{P}\Omega$ und ihre niedrigen K-Gruppen explizit bestimmen.

3.1 Pullbacks

Nach der Definition von Ω ist $K_0(\Omega) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, frei erzeugt von z. B. den Klassen von $G/G, G/* \in \mathrm{ob}(\Omega)$. Wir untersuchen, wie stark sich diese Grothendiekgruppe beim Übergang zum projektiven Abschluß $\mathbb{P}(\Omega)$ verkompliziert. Ein Blick auf den Kategorienring zeigt, daß einiges passieren muß.

Als Matrizenring veranschaulicht sich

$$[\Theta] = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}G & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & A_G \end{pmatrix}.$$

Die beiden strukturellen Grundbausteine, der Burnsidering A_G und der Gruppenring $\mathbb{Z}G$ treten also unvermischt, in Reinform in $[\Theta]$ auf. Wir notieren Elemente in $[\Theta]$ durch die Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} \alpha & bG \\ cG & dG + eG/G \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathbb{Z}G & \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} & A_G \end{pmatrix} = [\Theta],$$

wobei $\alpha \in \mathbb{Z}G$, $b, c, d, e \in \mathbb{Z}$, und jeweils $bG := b(G/G \leftarrow G/* \rightarrow G/*)$, $cG := c(G/* \leftarrow G/* \rightarrow G/G)$. Die Ringmultiplikation ist schon in diesem einfachen Fall erstaunlich komplex und errechnet sich zu

$$\begin{pmatrix} \alpha & bG \\ cG & dG + eG \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha' & b'G \\ c'G & d'G + e'G/G \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha\alpha' + bc' \sum_{g \in G} g & (|\alpha| b' + pbd' + be')G \\ (c|\alpha'| + pdc' + ec')G & (cb' + pdd' + de' + ed')G + ee'G/G \end{pmatrix}.$$

Hierbei ist $|\ | : \mathbb{Z}G \rightarrow \mathbb{Z}G/G \simeq \mathbb{Z}$ die Augmentation $g \mapsto 1$.

Betrachten wir nun die Endomorphismenringe in Ω, also die Diagonaleinträge von $[\Theta]$, d. h. Burnside- und Gruppenring. In unserem Spezialfall $G = \mathbb{Z}/p$ vereinfachen sich allgemeine Resultate über Burnside- und Gruppenring drastisch:

Die Einbettung des Burnsideringes

$$A_G \hookrightarrow \prod_{\phi(G)} \mathbb{Z}$$

(siehe Formel 2.14) ist nichts anderes als eine Pullbackdarstellung:

$$
\begin{tikzcd}
A_G \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z} \arrow[d] \\
\mathbb{Z} \arrow[r] & \mathbb{Z}/p
\end{tikzcd}
\tag{3.1}
$$

Für Gruppenringe existiert für $|G|$ quadratfrei eine Einbettung in ein Produkt von Drehgruppenringen (siehe [Kli], Korollar 3.4)

$$\mathbb{Z}G \hookrightarrow \prod_s \mathbb{Z}[\zeta_s] \circ B_s$$

(mit bestimmten Gruppen B_s und Einheitswurzeln ζ_s), die sich wiederum zu einem klassischen Pullback vereinfachen ("Rims Quadrat"):

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{Z}G \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & \mathbb{Z}[\zeta_p] \arrow[d, "j_1"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "j_2"] & \mathbb{Z}/p
\end{tikzcd}
\tag{3.2}
$$

Hierbei sind für einen festen Erzeuger g von G und eine p-te primitive Einheitswurzel ζ_p die Abbildungen

$$i_1(g) = \zeta_p, \quad i_2(g) = 1, \quad j_1(\zeta_p) = 1, \quad j_2(1) = 1.$$

Aus diesen Pullbackdarstellungen von A_G und $\mathbb{Z}G$ kann man eine Pullbackdarstellung von $[\Theta]$ gewinnen. Dazu wird ein Hilfsring benötigt:

$$R := \left\{ \begin{pmatrix} a & pb \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathrm{Mat}_2\mathbb{Z}.$$

Satz 3.3 *Es existiert ein Pullback von Ringen*

$$
\begin{tikzcd}
{[\Theta]} \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & \begin{pmatrix} \mathbb{Z}[\zeta_p] & \\ & \mathbb{Z} \end{pmatrix} \arrow[d, "j_1"] \\
\begin{pmatrix} \mathbb{Z}/p & \\ & \mathbb{Z}/p \end{pmatrix} \arrow[r, "j_2"] & R
\end{tikzcd}
$$

Dabei sind die Ringmorphismen gegeben durch

$$\begin{aligned}
i_1\begin{pmatrix} \alpha & bG \\ cG & dG + eG/G \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} |\alpha| & pb \\ c & pd + e \end{pmatrix} \\
i_2\begin{pmatrix} \alpha & bG \\ cG & dG + eG/G \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & \\ & e \end{pmatrix} \\
j_1\begin{pmatrix} a & pb \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & \\ & d \end{pmatrix} \\
j_2\begin{pmatrix} \zeta_p & \\ & b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} |\zeta_p| & \\ & b \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Hierbei ist $\bar{\ }: \mathbb{Z} \to [\zeta_p]$ *die Abbildung* $g \mapsto \zeta_p$.

Beweis. Nachrechnen zeigt, daß Ringmorphismen vorliegen. Für die Pullbackeigenschaft prüfe man, daß das Diagramm die Form

$$\begin{tikzcd}
{[\Theta]/(\operatorname{kern} i_1 \cap \operatorname{kern} i_2)} \arrow[r] \arrow[d] & {[\Theta]/\operatorname{kern} i_1} \arrow[d] \\
{[\Theta]/\operatorname{kern} i_2} \arrow[r] & {[\Theta]/(\operatorname{kern} i_1 \cup \operatorname{kern} i_2)}
\end{tikzcd}$$

hat, welches nach [C–R], S. 23 ein Pullback ist. Wir übergehen das Vorrechnen. □

Der Ring R kann nun durch ein weiteres Pullback zerlegt werden: Sei $\bar{R} := \mathbb{Z}/p \otimes R$.

Lemma 3.4 *Es existiert ein Pullback von Ringen*

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Mat}_2\mathbb{Z} \arrow[d] \\
\overline{R} \arrow[r] & \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/p)
\end{tikzcd}$$

Die waagerechten Pfeile sind die kanonischen Inklusionen, die senkrechten die kanonischen Projektionen.

Beweis. Offenbar liegen Ringmorphismen vor. Das Ideal $I := p\mathrm{Mat}_2\mathbb{Z}$ ist ganz in $R \subset \mathrm{Mat}_2\mathbb{Z}$ enthalten. Man prüfe, daß das Diagramm die Form

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Mat}_2\mathbb{Z} \arrow[d] \\
R/I \arrow[r] & (\mathrm{Mat}_2\mathbb{Z})/I
\end{tikzcd}$$

hat, welches nach [C–R], S. 23 ein Pullback ist. □

Man beachte, daß der Ringmorphismus $R \to \mathrm{Mat}_2\mathbb{Z}$, falls $\mathrm{Mat}_2\mathbb{Z}$ mit der Standardinvolution versehen wird, die Involutionen nicht respektiert. Dieses Pullback ist deshalb vom L-theoretischen Standpunkt wenig nützlich.

Man vermag also den Kategorienring $[\Theta]$ in relativ bekannte Ringe zerlegen. Nun muß man Wissen über diese Bestandteile in Information über $[\Theta]$ ummünzen. Dies kann geschehen, dank

Satz 3.5 *Gegeben sei ein Pullback von Ringen*

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{i_1} & \Lambda_1 \\ {\scriptstyle i_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_1} \\ \Lambda_2 & \xrightarrow{j_2} & \Lambda' \end{array},$$

wobei mindestens einer der Morphismen i_1, i_2 surjektiv ist. Dann ist die Kategorie $I\!P\Lambda$ äquivalent zur Pullbackkategorie $I\!P\Lambda_1 \times_{I\!P\Lambda} I\!P\Lambda_2$, und es existiert eine exakte Sequenz (Ausschneidung, "Mayer-Vietoris")

$$K_1(\Lambda) \to K_1(\Lambda_1) \oplus K_1(\Lambda_2) \to K_1(\Lambda') \to K_0(\Lambda) \to K_0(\Lambda_1) \oplus K_0(\Lambda_2) \to K_0(\Lambda').$$

Sind beide Ringmorphismen i_1 und i_2 surjektiv, so läßt sich diese Sequenz verlängern zu

$$K_2(\Lambda) \to K_2(\Lambda_1) \oplus K_2(\Lambda_2) \to K_2(\Lambda') \to K_1(\Lambda) \to \quad \cdots \quad \to K_0(\Lambda').$$

Beweis. [Mil], §2. □

Die Bedingung für die Verlängerung der Mayer-Vietoris-Sequenz, nämlich daß i_1 und i_2 surjektiv sind, ist hinreichend aber nicht notwendig, siehe [G–W].

Eine Pullbackkategorie $\mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{D}} \mathcal{C}_2$ von zwei Funktoren $\mathcal{C}_1 \xrightarrow{F_1} \mathcal{D} \xleftarrow{F_2} \mathcal{C}_2$ kann z. B. so konstruiert werden. $\mathcal{C}_1 \times_{\mathcal{D}} \mathcal{C}_2$ habe als Objekte Tripel (a_1, ϕ, a_2) mit $a_1 \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}_1)$, $a_2 \in \mathrm{ob}(\mathcal{C}_2)$ und $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F_1(a_1), F_2(a_2))$ ein Isomorphismus. Morphismen zwischen (a_1, ϕ, a_2) und (b_1, ψ, b_2) sind Paare (f_1, f_2) mit $f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_i}(a_i, b_i)$, $i = 1, 2$, so daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} F_1(a_1) & \xrightarrow{F(f_1)} & F_2(a_2) \\ {\scriptstyle \phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\ F_1(b_1) & \xrightarrow{F(f_2)} & F_2(b_2) \end{array}$$

kommutiert.

Wir notieren Morphismen bisweilen mit einem einzigen suggestiven Diagramm

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[d, "f_1"'] & F_1(a_1) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "F_1(f_1)"'] & F_2(a_2) \arrow[d, "F_2(f_2)"] & a_2 \arrow[d, "f_2"] \\
b_1 & F_1(b_1) \arrow[r, "\psi"] & F_2(b_2) & b_2
\end{tikzcd},$$

Die Äquivalenz $I\!P\Lambda_1 \times_{P\Lambda} I\!P\Lambda_2 \to I\!P\Lambda$ im Satz 3.5 kann wie folgt konstruiert werden: Gegeben $(P_1, P_2, \phi) \in I\!P\Lambda_1 \times_{P\Lambda} I\!P\Lambda_2$. Es sei

$$M(P_1, P_2, \phi) \in I\!P\Lambda \tag{3.6}$$

zunächst als $\mathbb{Z}$-Modul gegeben durch

$$\{(p_1, p_2) \in P_1 \times P_2 \mid \phi j_{1*}(p_1) = j_2(p_2)\}.$$

Die Λ-Modulstruktur wird durch

$$\lambda \cdot (p_1, p_2) := (i_1(\lambda)p_1, i_2(\lambda)p_2)$$

geliefert.

3.2 Projektive Moduln

Nun werden die Pullbacks aus dem obigen Abschnitt verwertet. Die Ringe $\overline{R}, R$ und $[\Theta]$werden der Reihe nach untersucht.

Alle Ringe, die sich in irgendeiner Weise als Matrizenringe schreiben lassen, besitzen kanonische projektive Linksmoduln, nämlich ihre Spalten. Das trifft also auf $R = \left\{\begin{pmatrix} a & pb \\ c & d \end{pmatrix}\right\}$ und $\overline{R} = \left\{\begin{pmatrix} \bar{a} & \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix}\right\}$ zu. Die beiden Spaltenmoduln von R seien

$$S_1 := \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\} \text{ und } S_2 := \left\{\begin{pmatrix} pa \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\},$$

und entsprechend seien

$$\bar{S}_1 := \left\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}/p\right\} \text{ und } \bar{S}_2 := \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \mid b \in \mathbb{Z}/p\right\}$$

die beiden Spaltenmoduln von $\overline{R}$. Offenbar ist $\bar{S}_i = \overline{R} \otimes_R S_i$, $i = 1, 2$. Für $\overline{R}$ sind das im wesentlichen alle projektiven Moduln:

Lemma 3.7 *Jeder endlich erzeugte projektive Modul von $\overline{R}$ ist isomorph zu einer direkten Summe von Moduln $\bar{S}_1$ und $\bar{S}_2$. Es ist $K_0(\overline{R}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.*

Beweis. Wir reduzieren nach dem Radikal (= Jacobsonradikal): Die maximalen Linksideale von $\overline{R}$ sind

$$I_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ b & 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ und } I_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \\ b & c \end{pmatrix} \right\}.$$

Das Radikal von $\overline{R}$, der Durchschnitt aller maximalen Linksideale, ist also $\mathrm{rad}(\overline{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \\ a & 0 \end{pmatrix} \right\}$. Da $\mathrm{rad}(\overline{R})$ nilpotent ist, ist $\overline{R}$ $\mathrm{rad}(\overline{R})$-vollständig. Nach [Bass], S. 90, Proposition 2.12 induziert der Reduktionsfunktor $I\!P\overline{R} \to I\!P(\overline{R}/\mathrm{rad}\overline{R})$ eine Isomorphie der Objektmengen ("Liften von Idempotenten"). Es wird aber $I\!P(\overline{R}/\mathrm{rad}\overline{R}) = I\!P(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p)$ frei erzeugt von den Faktoren von $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$, deren Lifts nun gerade $\bar{S}_1$ resp. $\bar{S}_2$ sind. Dementsprechend ist $K_0(\overline{R}) \simeq K_0(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. □

Wir wollen die analoge Aussage für R beweisen. Hier ist die Situation etwas unübersichtlicher, und es wird die Kenntnis der $\overline{R}$-Homomorphismenmoduln der $\bar{S}_i$'s benötigt. Aus

$$\begin{aligned} \overline{R} &\simeq \mathrm{End}_{\overline{R}}(\overline{R}) \simeq \mathrm{End}_{\overline{R}}(\bar{S}_1 \oplus \bar{S}_2) \\ &\simeq \mathrm{End}_{\overline{R}}(\bar{S}_1) \oplus \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\bar{S}_1, \bar{S}_2) \oplus \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\bar{S}_2, \bar{S}_1) \oplus \mathrm{End}_{\overline{R}}(\bar{S}_2) \end{aligned}$$

folgt:

$$\begin{aligned} \mathrm{End}_{\overline{R}}(\bar{S}_1) &\simeq \mathbb{Z}/p \\ \mathrm{End}_{\overline{R}}(\bar{S}_2) &\simeq \mathbb{Z}/p \\ \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\bar{S}_2, \bar{S}_1) &\simeq \mathbb{Z}/p \\ \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\bar{S}_1, \bar{S}_2) &\simeq 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Lemma 3.9 *Jeder endlich erzeugte projektive Modul von R ist isomorph zu einer direkten Summe der Moduln S_1 und S_2. Es ist $K_0(R) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.*

Beweis. Wir benutzen das Pullback aus Lemma 3.4:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}) \arrow[d] \\ \overline{R} \arrow[r] & \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/p) \end{tikzcd}$$

Die Kategorien $I\!P(R)$ und $I\!P(\overline{R}) \times_{P\ \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/p)} I\!P(\mathrm{Mat}_2\mathbb{Z})$ sind äquivalent. Untersuchen wir also die Pullbackkategorie. Da jeder Ring zu seinen $n \times n$-Matrizenringen Moritaäquivalent ist, wird $I\!P(\mathrm{Mat}_2\mathbb{Z})$ von dem Spaltenmodul N frei erzeugt, und die $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$-linearen Abbildungen $N \to N$ sind gegeben durch Multiplikation mit einem Element $a \in \mathbb{Z}$, Analoges gilt für $I\!P(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/p))$. Also ist $\mathrm{End}_{\mathrm{Mat}_2\mathbb{Z}}(N^n) \simeq GL_n(\mathbb{Z})$,

$\mathrm{End}_{\mathrm{Mat}_2\mathbb{Z}/p}(\bar{N}^n) \simeq GL_n(\mathbb{Z}/p)$. Die projektiven R-Moduln S_i, $i = 1,2$, entsprechen gerade den Elementen

$$(\bar{S}_i, \quad \bar{N} \xrightarrow{\mathrm{id}} \bar{N}, \quad N)$$

der Pullbackkategorie. Sowohl $\bar{S}_1$ als auch $\bar{S}_2$ sind Lifts von $\bar{N}$. Gegeben sei nun ein beliebiges Element der Pullbackkategorie

$$(\bar{S}, \quad \bar{N}^n \xrightarrow{\phi} \bar{N}^n, \quad N^n)$$

wobei $\bar{S}$ eine direkte Summe von n Moduln aus $\{\bar{S}_1, \bar{S}_2\}$ ist. Nachzuweisen ist, daß dieses Element in die trivialen Moduln zerfällt.

Fassen wir dazu ϕ als $n \times n$-Matrix bezüglich der Standardbasis in $\bar{N}^n$ mit Einträgen in $\mathbb{Z}/p$ auf. Man entnehme 3.8, daß es nicht immer möglich ist, ϕ nach $\mathbb{P}\overline{R}$ zu liften. Diese Unpäßlichkeit kann jedoch mit einem Koordinatenwechsel behoben werden: Man wähle einen $\overline{R}$-lineare Isomorphismus

$$\psi : \bar{S} \xrightarrow{\simeq} \bar{S}_2^k \oplus \bar{S}_1^{n-k},$$

der durch eine Permutationsmatrix beschrieben wird. Da Permutationsmatrizen als solche nach $\mathbb{P}\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/p)$ absteigen und mühelos weiter nach $\mathbb{P}\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$ geliftet werden können, erhält man einen Isomorphismus in der Pullbackkategorie:

$$\begin{array}{cccccc}
\bar{S} & & \bar{N}^n & \xrightarrow{\phi} & \bar{N}^n & N^n \\
\downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\
\bar{S}_2^k \oplus \bar{S}_1^{n-k} & & \bar{N}^n & \xrightarrow{\psi\phi\psi^{-1}} & \bar{N}^n & N^n
\end{array}$$

Hierbei beschreibe ψ jeweils den durch die Permutationsmatrix gegebenen Morphismus.

Ohne Einschränkung sei also $\bar{S} = \bar{S}_2^k \oplus \bar{S}_1^{n-k}$, und wir können mit bereinigter Notation neu beginnen. Nach der Gauß-Bruhat-Zerlegung vermag man eine Zerlegung

$$\phi^{-1} = B \circ P \circ U$$

finden, wobei U durch eine unipotente oberer Dreiecksmatrix, P durch eine Permutationsmatrix und B durch eine oberer Dreiecksmatrix beschrieben wird. Also können die Automorphismen P und U nach $\mathbb{P}(\mathrm{Mat}_2\mathbb{Z})$ geliftet werden. Es ist klar, daß auch B^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist. Nach 3.8 kann B ebenso nach $\mathbb{P}\overline{R}$ geliftet werden. Wir bezeichnen die jeweiligen Lifts immer mit dem gleichen Symbol. Diese Lifts liefern nun die gesuchte Trivialisierung:

$$\begin{array}{cccccc}
\bar{S}_2^k \oplus \bar{S}_1^{n-k} & & \bar{N}^n & \xrightarrow{\phi} & \bar{N}^n & N^n \\
\downarrow{\scriptstyle B^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle B^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle PU} & \downarrow{\scriptstyle PU} \\
\bar{S}_2^k \oplus \bar{S}_1^{n-k} & & \bar{N}^n & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \bar{N}^n & N^n
\end{array}$$

□

Damit werden die Bestandteile des Pullbacks aus Satz 3.3 hinreichend gut behersch t, um die Struktur der Kategorie $I\!P[\Theta]$ zu analysieren. Dies geschieht durch die Kategorien $I\!P(\mathbb{Z}G)$ und $I\!P(A_G)$, die wiederum durch die Pullbacks in 3.2 und 3.1 bequem zugänglich sind.

Satz 3.10 *Jeder unzerlegbare, nichttriviale projektive Modul über $\mathbb{Z}G$ ist von der Form*

$$M(I, \mathbb{Z}, 1),$$

wobei I ein nichttriviales Ideal in $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ ist, und $1 \in \mathbb{Z}/p^* = GL_1(\mathbb{Z}/p)$. Jeder unzerlegbare, nichttriviale projektive Modul über A_G ist von der Form

$$M(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}, d);$$

wobei $d \in \mathbb{Z}/p^* = GL_1(\mathbb{Z}/p)$. Hierbei ist $M(?,?,?)$ die Klebekonstruktion aus 3.6.

Beweis. Zunächst zur Aussage über den Gruppenring. $M(I, \mathbb{Z}, 1)$ ist unzerlegbar und nichttrivial, weil es I und $\mathbb{Z}$ sind. Gegeben irgendein Element $M(P, \mathbb{Z}^n, \phi)$ der Pullbackkategorie. Man zerlege $P = \bigoplus_{i=1}^n I_i$ in eine Summe von nichttrivialen Idealen in $\mathbb{Z}[\zeta_p]$. Da jedes nichttriviale Ideal in $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ konstanten Rang 1 hat (die Idealklassengruppe von $\mathbb{Z}[\zeta_p]$ ist ja auch dessen Picardgruppe), liegt es über dem $\mathbb{Z}/p$-Modul $\mathbb{Z}/p$. Man stelle sich wieder $\phi \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{Z}/p)$ als Matrix vor und zerlege

$$\phi^{-1} = D \circ V \circ P \circ U,$$

wobei U, V durch unipotente obere Dreiecksmatrizen, D durch eine Diagonalmatrix und P durch eine Permutationsmatrix beschrieben wird. Da die Abbildung $\mathbb{Z}[\zeta_p] \to \mathbb{Z}/p$ eine Surjektion $\mathbb{Z}[\zeta_p]^* \to \mathbb{Z}/p^*$ induziert, läßt sich D^{-1} nach $I\!P(\mathbb{Z}[\zeta_p])$ liften. Klar ist, daß sich P, V und U nach $I\!P\mathbb{Z}$ liften lassen.

Dies liefert den erwünschten Isomorphismus in der Pullbackkategorie

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus I_i \arrow[d, "D^{-1}"'] & (\mathbb{Z}/p)^n \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "D^{-1}"'] & (\mathbb{Z}/p)^n \arrow[d, "VPU"] & \mathbb{Z}^n \arrow[d, "VPU"] \\
\bigoplus I_{\pi i} & (\mathbb{Z}/p)^n \arrow[r, "\mathrm{id}"] & (\mathbb{Z}/p)^n & \mathbb{Z}^n
\end{tikzcd},$$

welcher die behauptete Zerlegung in irreduzible Moduln ist. Das Argument für den Burnsidering ist analog. □

Wir können nun zum Hauptresultat dieses Abschnittes schreiten:

Satz 3.11 *Jeder unzerlegbare, nichttriviale projektive Modul über* $[\Theta]$ *hat die Form*

$$\begin{pmatrix} M(I,\mathbb{Z},1) \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix} \quad \textit{oder} \quad \begin{pmatrix} p\mathbb{Z} \\ M(\mathbb{Z},\mathbb{Z},d) \end{pmatrix}$$

für $I \in \mathbb{Z}[\zeta_p]$ *ein nichttriviales Ideal,* $d \in \mathbb{Z}/p^*$*. Die* $[\Theta]$*-Modulstrukturen werden durch die folgenden Formeln beschrieben:*

$$\begin{pmatrix} \alpha & bG \\ cG & dG+e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (i,y) \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\tilde{\alpha}i, |\alpha|y + pbz) \\ cy + (pd+e)z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & bG \\ cG & dG+e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} px \\ (y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(|\alpha|x + bz) \\ (ey, pcx + (pd+e)z) \end{pmatrix}$$

Beweis. Es wird das Pullback aus Satz 3.3 verwendet. Zu untersuchen ist die Pullbackkategorie $\mathbb{P}(\mathbb{Z}[\zeta_p] \times \mathbb{Z}) \times_{\mathbb{P}(\mathbb{Z}/p\times\mathbb{Z}/p)} \mathbb{P}(R)$. Die beiden nichttrivialen, unzerlegbaren projektiven Moduln von R seien S_1 und S_2 wie in Lemma 3.9. Sie induzieren die beiden nichttrivialen projektiven unzerlegbaren Moduln $\hat{S}_1$ und $\hat{S}_2$ von $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$. Die nichttrivialen unzerlegbaren projektiven Moduln von $\mathbb{Z}[\zeta_p] \times \mathbb{Z}$ sind von der Form $I \times 0$ oder $0 \times \mathbb{Z}$ ($I \subset \mathbb{Z}[\zeta_p]$ nichttriviales Ideal), die ebenfalls $\hat{S}_1$ resp. $\hat{S}_2$ induzieren. Die Objektmenge der Pullbackkategorie zerfällt also, deshalb die beiden Alternativen im Satz. Betrachten wir zunächst ein Element der Form

$$\bigoplus_{i=1}^{n} I_i \qquad \hat{S}_1^n \xrightarrow{\phi} \hat{S}_1^n \qquad S_1^n.$$

Dies zerfällt in Moduln der angegebenen Form, analog zum Beweis von Satz 3.9.

Gegeben sei nun ein Element der Form

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z} \qquad \hat{S}_2^n \xrightarrow{\phi} \hat{S}_2^n \qquad S_2^n.$$

Durch die Zerlegung

$$\phi^{-1} = D \circ V \circ P \circ U$$

(P Permutationsmatrix, D Diagonalmatrix, U und V unipotente untere Dreiecksmatrix) erhält man wie gehabt den gesuchten Isomorphismus

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}^n & \hat{S}_2^n & \xrightarrow{\phi} & \hat{S}_2^n & S_2^n \\ \downarrow \mathrm{id} & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow VPU & \downarrow VPU \\ \mathbb{Z}^n & \hat{S}_2^n & \xrightarrow{D^{-1}} & \hat{S}_2^n & S_2^n \end{array},$$

der die Zerlegung liefert. Die Formeln für die $[\Theta]$-Modulstrukturen ergeben sich aus der Klebekonstruktion 3.6.

□

3.3 Die Klassengruppe

Im vorigen Abschnitt wurde die Kategorie der endlich erzeugten, projektiven Moduln von $[\Theta]$ analysiert. Wir sahen, daß die beiden Strukturmerkmale $\mathbb{Z}G$ und A_G gleichberechtigt auftreten, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen. Die Situation ändert sich dramatisch, wenn man zur Klassengruppe $K_0([\Theta])$ übergeht, d. h. stabilisert wird. Wie wir sehen werden, ist der Einfluß von A_G instabil und kürzt sich fast vollständig heraus, es bleibt lediglich die Struktur übrig, die von $\mathbb{Z}G \times \mathbb{Z}$, den Gruppenringen der Weylgruppen, geliefert wird. Hauptwerkzeug in diesem Abschnitt wird die Mayer-Vietoris-Sequenz aus Satz 3.5 sein.

Satz 3.12 *Der Ringmorphismus $[\Theta] \to \mathbb{Z}[\zeta_p] \times \mathbb{Z}$ induziert eine Isomorphie der K_0-Gruppen. Es ist $K_0([\Theta]) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Cl}(\mathbb{Z}[\zeta_p]) \oplus \mathbb{Z}$.*

Beweis. Wir benutzen Milnors Mayer-Vietoris-Sequenz zum Pullback in Satz 3.3:

$$\begin{gathered} K_1(\mathbb{Z}[\zeta_p] \times \mathbb{Z}) \oplus K_1(R) \to K_1(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p) \to \\ K_0([\Theta]) \to K_0(\mathbb{Z}[\zeta_p] \times \mathbb{Z}) \oplus K_0(R) \to K_0(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p) \end{gathered}$$

Nach Lemma 3.9 ist $K_0(R) \to K_0(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p)$ ein Isomorphismus. Die Behauptung folgt aus der Exaktheit der Sequenz, wenn nachgewiesen wird, daß

$$K_1(\mathbb{Z}[\zeta_p] \times \mathbb{Z}) \oplus K_1(R) \to K_1(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p)$$

surjektiv ist. Dies kann schon in den Einheitengruppen der Ringe geprüft werden. Es liegt ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} R^* \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}/p^* \oplus \mathbb{Z}/p^* \arrow[d] \\ K_1(R) \arrow[r] & K_1(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p) \end{tikzcd}$$

vor. Sei $a \in \mathbb{Z}$ mit $\bar{a} \in \mathbb{Z}/p$. Da a und p relativ prim sind, kann man $d, c \in \mathbb{Z}$ finden mit $ad + pc = \pm 1$, also $d \equiv \pm a^{-1} \bmod p$. Die Matrix

$$X := \begin{pmatrix} a & p \\ c & d \end{pmatrix} \in R \subset \mathrm{Mat}_2\mathbb{Z}$$

hat dann Determinante ± 1, ist also in $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})$ invertierbar, und nach Determinantenformel für Inverse schon in R invertierbar. X repräsentiert also ein Element in $K_1(R)$, das auf $(\bar{a}, \pm\bar{a}^{-1}) \in K_1(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p)$ abgebildet wird. Also ist eine "Diagonale" im Bild von $K_1(R) \to K_1(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p)$. Andererseits ist $K_1(\mathbb{Z}[\zeta_p]) \to K_1(\mathbb{Z}/p)$ surjektiv ([Mil], S. 32). Zusammen mit der Diagonalen ergibt das die Surjektivität von $K_1(\mathbb{Z}[\zeta_p] \times \mathbb{Z}) \oplus K_1(R) \to K_1(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p)$.

□

Korollar 3.13 *Der kanonische Ringmorphismus*

$$\mathbb{Z}G \times \mathbb{Z}(G/G) \xrightarrow{\Delta} [\Theta]$$

induziert einen Isomorphismus in den K_0-Gruppen.

Beweis. Die Vorder- und Rückseiten des folgenden Würfels sind Pullbacks, und der Würfel selbst ist ein Morphismus der Pullbacks.

$$\begin{tikzcd}
 & {[\Theta]} \arrow[rr] \arrow[dd] & & R \arrow[dd] \\
\mathbb{Z}G \times \mathbb{Z} \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & \mathbb{Z}[\zeta_p] \times \mathbb{Z} \arrow[rr] & & \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p \\
\mathbb{Z}[\zeta_p] \times \mathbb{Z} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z} \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{3.14}$$

Man erhält einen Morphismus von Mayer-Vietoris-Sequenzen:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K_0(\mathbb{Z}G \times \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d, "\Delta_*"'] & K_0(\mathbb{Z}[\zeta_p] \times \mathbb{Z}) \oplus K_0(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \arrow[r] \arrow[d] & K_0(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & K_0([\Theta]) \arrow[r] & K_0(\mathbb{Z}[\zeta_p] \times \mathbb{Z}) \oplus K_0(R) \arrow[r] & K_0(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p)
\end{tikzcd}$$

Die beiden rechten Abbildungen sind Isomorphismen, nach dem 5er Lemma also auch Δ_*.

□

Man bemerkt, daß der Einfluß des Burnsideringes verlorengegangen ist. Der Grund für diesen Stabilisierungseffekt ist, daß die beiden Abbildungen

$$\begin{tikzcd}
 & K_1(R) \arrow[d] \\
K_1(\mathbb{Z}[\zeta_p] \times \mathbb{Z}) \arrow[r] & K_1(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p)
\end{tikzcd}$$

für sich betrachtet nicht surjektiv sind, wohl aber ihre Summe.

Beispiel 3.15 Hier ist die Kürzung. Notation wie im Satz 3.10. In $K_0([\Theta])$ gilt die folgende Gleichung:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \mathbb{Z} \\ M(\mathbb{Z},\mathbb{Z},d) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbb{Z}G \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \\ M(\mathbb{Z},\mathbb{Z},d) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{Z}G \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix} \\
&\overset{(*)}{\cong} \begin{pmatrix} \mathbb{Z}G \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \\ M(\mathbb{Z},\mathbb{Z},1) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{Z}G \\ \mathbb{Z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbb{Z} \\ M(\mathbb{Z},\mathbb{Z},1) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$(*)$ kann man in der Pullbackkategorie verfolgen; der fragliche Isomorphismus ist nämlich

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{Z}[\zeta_p] \times \mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p & \xrightarrow{(1,d)} & \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p & R \\
{\scriptstyle (d,1)}\downarrow & {\scriptstyle (d,1)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (d,d^{-1})} & \downarrow{\scriptstyle (d,d^{-1})} \\
\mathbb{Z}[\zeta_p] \times \mathbb{Z} & \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p & R\ .
\end{array}$$

Faßt man alles zusammen, so ergibt sich die projektive Klassengruppe

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_0(\Omega) &= K_0(\mathbb{P}\Omega)/K_0(\Omega) \\
&\simeq K_0(\mathbb{Z}[\zeta_p] \times \mathbb{Z})/\mathbb{Z}^2 \\
&\simeq \mathrm{Cl}(\mathbb{Z}[\zeta_p])
\end{aligned}$$

als die Idealklassengruppe von $\mathbb{Z}[\zeta_p]$. In Kapitel 5 wird die projektive Klassengruppe als Teil eines Hindernisses interpretiert, dessen Verschwinden es ermöglicht, in der L-Theorie kategorientheoretische Probleme ringtheoretisch zu lösen. In unserem Fall verschwindet das Hindernis manchmal schon aus rein zahlentheoretischen Gründen, nämlich $\mathrm{Cl}(\mathbb{Z}[\zeta_p]) = 0$.

3.4 Die Torsionsgruppe

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß auch $K_1(\mathbb{Z}G \times \mathbb{Z}) \xrightarrow{\Delta_*} K_1([\Theta]) \simeq K_1(\Omega)$ ein Isomorphismus ist, doch leider kann die Argumentation nicht so geradlinig wie im Falle K_0 verlaufen. Das Hauptproblem besteht in der Verlängerung der Mayer-Vietoris-Sequenzen nach K_2. Es liegt natürlich nach Satz 3.5 eine exakte Sequenz

$$\begin{gathered}
0 = K_2(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p) \to \\
K_1(\Omega) \to K_1(\mathbb{Z}[\zeta_p] \times \mathbb{Z}) \oplus K_1(R) \to K_1(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}) \to 0
\end{gathered}$$

vor. Ein Problem ist die Bestimmung von $K_1(R)$. Die entsprechende Sequenz ist a priori erst ab K_1 exakt:

$$\begin{gathered}
0 = K_2(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/p)) \xrightarrow{?} \\
K_1(R) \to K_1(\overline{R}) \oplus K_1(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})) \to K_1(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/p)) \to 0
\end{gathered} \tag{3.16}$$

Der letzte Pfeil ist 0, weil $K_1(\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/p) \simeq \mathbb{Z}/p^*$ ein Torsionsmodul und $K_0(R)$ frei ist (Lemma 3.9). Hindernisse für die Existenz von exakten Auschneidungssequenzen sind von Geller und Weibel in [G-W] bestimmt worden.

Für einen injektiven Ringmorphismus $A \hookrightarrow B$ und ein Ideal $I \subset B$, das ganz in A enthalten ist, definieren sie Hindernisgruppen $K_i(A, B, I)$, $i \geq 0$, so daß im Falle $K_i(A, B, I) = K_{i-1}(A, B, I) = 0$ eine exakte Sequenz

$$\begin{gathered} K_i(A) \to K_i(B) \oplus K_i(A/I) \to K_i(B/I) \to \\ K_{i-1}(A) \to K_{i-1}(B) \oplus K_{i-1}(A/I) \to K_{i-1}(B/I) \end{gathered}$$

vorliegt. Diese Hindernisgruppen werden als Homotopiegruppen definiert, gestatten jedoch für kleine Indizes algebraische Interpretationen. Es ist z. B. immer $K_0(A, B, I) = 0$, das ist gerade Satz 3.5. Interessanter ist

Satz 3.17 (Geller–Weibel) *Es gilt*

$$K_1(A, B, I) \simeq B/A \otimes_{\mathbb{Z}} I/I^2 / \left\{ b \otimes cx + c \otimes xb - bc \otimes x;\ b, c \in B,\ x \in I/I^2 \right\}$$

Beweis. [G–W], Theorem (0.2) und Bemerkung (4.1.2). □
Diese Darstellung fällt natürlich nicht vom Himmel, sonder ergibt sich aus einer Darstellung von $K_1(A, B, I)$ als Quotient gewisser Steinberggruppen.

Das Resultat läßt sich anwenden:

Satz 3.18 *Es ist* $K_1(R, \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}), p\mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z})) = 0$. *Die Sequenz in 3.16 ist also exakt.*

Beweis. Man spiele mit den Relationen aus Satz 3.17. Sei $A := R$, $B := \mathrm{Mat}_2\mathbb{Z}$, $I := p\mathrm{Mat}_2\mathbb{Z}$. Es ist $B/A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}/p \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \simeq \mathbb{Z}/p$, und $I/I^2 \simeq \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Z}/p)$. In den folgenden Rechnungen unterdrücken wir häufig Martizeneinträge, die 0 sind. Für ein $x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in I/I^2$ hat man

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \begin{pmatrix} & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} \otimes x \\ &\equiv \begin{pmatrix} & \\ & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} \otimes x \begin{pmatrix} & \\ & 1 \end{pmatrix} && \text{Relationen} \\ &\equiv 0 + \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & x_2 \\ 0 & x_3 \end{pmatrix} && \text{da } \begin{pmatrix} & \\ & 1 \end{pmatrix} \in A \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} \otimes x \\ &\equiv \begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} \otimes x \begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix} && \text{Relationen} \\ &\equiv 0 + \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_2 & \\ x_4 & 0 \end{pmatrix} && \text{da } \begin{pmatrix} & \\ 1 & \end{pmatrix} \in A. \end{aligned}$$

Jedes Element aus $K_1(A,B,I)$ kann dargestellt werden als

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} y_1 & 0 \\ y_3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & 1 \\ & \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & y_2 \\ 0 & y_4 \end{pmatrix},$$

welches nach dem Vorangegangenen 0 ist. □

Dieses Resultat eröffnet einen Weg, um $K_1(R)$ zu berechnen.

Lemma 3.19 *Der Ringmorphismus $\overline{R} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ induziert einen Isomorphismus*

$$K_1(\overline{R}) \xrightarrow{\simeq} K_1(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p) \simeq \mathbb{Z}/p^* \oplus \mathbb{Z}/p^*.$$

Beweis. Der Ring $\overline{R}$ ist eine triviale spaltende Erweiterung des Ringes $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$ um das Ideal $I := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \\ a & 0 \end{pmatrix} \in \overline{R} \right\}$:

$$I \to \overline{R} \rightleftharpoons \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p$$

Die Abbildung $K_1(f)$ besitzt demnach ein Rechtssinverses, ist also surjektiv. Es reicht also, noch $|K_1(\overline{R})| \leq |K_1(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p)|$ zu zeigen. Da $\overline{R}$ semilokal ist, gilt nach [Vas], daß die Abbildung $\overline{R}^* \to K_1(\overline{R})$ surjektiv ist, mit Kern erzeugt von allen Ausdrücken der Form $(1+xy)(1+yx)^{-1}$, deren Faktoren aus $\overline{R}^*$ stammen. Nun ist aber für $c \in \mathbb{Z}/p$ beliebig

$$\begin{aligned}\left(1 + \begin{pmatrix} & \\ c & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}\right)\left(1 + \begin{pmatrix} 1 & \\ & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & \\ c & \end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix} 1 & \\ c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \\ c & 1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

und man erhält eine Surjektion

$$\mathbb{Z}/p^* \oplus \mathbb{Z}/p^* \simeq \overline{R}^* / \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \\ c & 1 \end{pmatrix}, c \in \mathbb{Z}/p \right\} \longrightarrow K_1(\overline{R}).$$

Also muß $K_1(f)$ bijektiv sein. □

Lemma 3.20 *Es ist $K_1(R) \simeq \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/p^*$.*

Beweis. Nach Satz 3.18 verschwinden die Hindernisse für die Existenz einer exakten Ausschneidungssequenz ab K_2. Es liegt also eine exakte Sequenz vor:

$$\begin{tikzcd}
K_2(\mathbb{Z}/p) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & K_1(R) \arrow[r] & K_1(\overline{R}) \arrow[d, "\simeq"'] & \oplus K_1(\mathbb{Z}) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\simeq"'] & K_1(\mathbb{Z}/p) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"'] & 0 \\
0 & & \mathbb{Z}/p^* \oplus \mathbb{Z}/p^* & \mathbb{Z}/2 & \mathbb{Z}/p^* &
\end{tikzcd}$$

Nach Lemma 3.19 fassen wir $K_1(\overline{R})$ als Untergruppe der invertierbaren Diagonalmatrizen auf. Es ist

$$\begin{aligned}\operatorname{kern} f &\simeq \{(a,b,c) \mid a,b \in \mathbb{Z}/p^*,\ c \in \mathbb{Z}^*,\ abc^{-1} \equiv 1 \bmod p\} \\ &\simeq \{(a, ca^{-1}, c) \mid a \in \mathbb{Z}/p^*,\ c \in \mathbb{Z}^*\} \\ &\simeq \mathbb{Z}/p^* \oplus \mathbb{Z}/2\end{aligned}$$

Für $p \neq 2$ kann man $K_1(R)$ als Menge $\{(a, \pm a^{-1}) \mid a \in \mathbb{Z}/p^*\}$ identifizieren. □

Und nun:

Satz 3.21 *Der Ringmorphismus $\mathbb{Z}G \times \mathbb{Z} \xrightarrow{\Delta} [\Theta]$ induziert eine Isomorphie der K_1-Gruppen.*

Beweis. Wir ziehen wieder den Morphismus von Pullbacks 3.14 heran und erhalten

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & K_1(\mathbb{Z}G \times \mathbb{Z}) & \to & K_1(\mathbb{Z}[\zeta_p] \otimes \mathbb{Z}) \oplus K_1(\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_1} & K_1(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}) \\ & & {\scriptstyle \Delta_*}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & K_1([\Theta]) & \to & K_1(\mathbb{Z}[\zeta_p] \times \mathbb{Z}) \oplus K_1(R) & \xrightarrow{f_2} & K_1(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/p) \end{array}$$

Das Diagramm beginnt oben links mit 0, weil $K_2(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) \to K_2(\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z})$ surjektiv ist. Man muß nun die Kerne von f_1 und f_2 von Hand vergleichen. Es ist

$$\begin{aligned}\operatorname{kern} f_1 &= \{(\alpha, x), (y, z) \mid \alpha \in \mathbb{Z}[\zeta_p]^*;\ x, y, z \in \mathbb{Z}^*,\ |\alpha| y^{-1} \equiv 1\,(p), xy^{-1} = 1\} \\ \operatorname{kern} f_2 &= \{(\alpha, x), (a, ba^{-1}, b) \mid \alpha \in \mathbb{Z}[\zeta_p]^*,\ a \in \mathbb{Z}/p^*, b \in \mathbb{Z}^*,\ |\alpha| a^{-1} \equiv 1,\ xb^{-1}a = 1\}\end{aligned}$$

Die Abbildungen zwischen den Kernen

$$\operatorname{kern} f_1 \ni (\alpha, x), (y, z) \mapsto (\alpha, x), (y, zyy^{-1}, zy) \in \operatorname{kern} f_2$$

liefert eine Isomorphie, da die definierenden Relationen aufeinander abgebildet werden:

$$\begin{array}{c} |\alpha| y^{-1} \equiv 1 \mod p \\ xy^{-1} = 1 \end{array} \iff \begin{array}{c} |\alpha| y^{-1} \equiv 1 \mod p \\ x\left((zy)y^{-1}\right)^{-1} = 1 \end{array}.$$

Also ist $K_1(\Delta)$ ein Isomorphismus. □

4 Lokalisierung abseits der Gruppenordnung

In diesem Abschnitt wird studiert, wie sich Ω bei der Invertierung der Gruppenordnung von G verhält. Es sei durchgängig G eine beliebige endliche Gruppe und R ein Ring, in dem $|G|$ invertierbar ist.

$R \otimes_{\mathbf{Z}} \Omega$ ist $R \otimes_{\mathbf{Z}} \Omega$-additiv, und der Burnsidering mit Koeffizienten in R ist trivial, A_G
d. h. $R \otimes \varphi : R \otimes A_G \xrightarrow{\simeq} \prod_{\phi(G)} R$ ist ein Isomorphismus. Es treten also $|\phi(G)|$ orthogonale, zentrale, primitive Idempotente $\left\{1 \otimes e_H^{|G|} \mid (H) \in \phi(G)\right\}$ auf, die die Kategorie $R \otimes \Omega$ und die Algebra $R \otimes [\Theta]$ zerlegen. Wir schreiben für diese Idempotente oft einfach nur $e_H^{|G|}$. Da Ω eine Mixtur aus Burnsidering- und Gruppenringstruktur trägt, kann man erwarten, daß in den Zerlegungskomponenten die Gruppenringstrukturen dominieren. Das ist auch der Fall: Es wird eine Moritaäquivalenz M_H zwischen den Ringen $e_H^{|G|}[R \otimes \Theta] \simeq [e_H^{|G|}\Theta]$ und RWH konstruiert. Die Kategorien $I\!P(e_H^{|G|}[R \otimes \Theta])$ und $I\!P(RWH)$ sind also äquivalent und besitzen insbesondere isomorphe K- und L-Gruppen.

Leider übertragen sich diese Moritaäquivalenzen nicht auf den ganzzahligen Fall und sagen zunächst nichts über den Ringmorphismus $R \otimes \Delta : \prod_{(H) \in \phi(G)} RWH \to [R \otimes \Theta]$ aus. Jedoch kann obige Moritaäquivalenz $M := \bigoplus M_H$ als "Koordinatensystem" benutzt werden: statt $(R \otimes \Delta)_*$ werden wir den induzierten Funktor F im folgenden Diagramm studieren:

$$\begin{tikzcd}
 & I\!P([R \otimes \Theta]) \arrow[dr, "M", "\simeq"'] & \\
I\!P(\prod RWH) \arrow[ur, "\Delta_*"] \arrow[rr, "F"] & & I\!P([\Theta \otimes R])
\end{tikzcd}$$

Es stellt sich heraus, daß der Funktor F bezüglich der Ordnung vom $\phi(G)$ "monoton" ist, genauer: er läßt sich als "unipotente obere Dreiecksmatrix" beschreiben. Aus dieser Eigenschaft vermag man leicht ableiten, daß $K_*(F)$, $L_*(F)$ und $L^*(F)$ Isomorphismen sind. Dann sind es aber auch $K_*(R \otimes \Delta)$, $L_*(R \otimes \Delta)$ und $L^*(R \otimes \Delta)$! An dieser Stelle wird also ausgenutzt, daß die Kategorie Ω eine versteckte "Anordnung" trägt, die jedoch erst durch den Burnsidering nach Lokalisierung sichtbar wird.

Im folgenden bezeichne ein Strich immer Tensorieren mit R, z. B. $\Omega' := R \otimes \Omega$.

4.1 Idempotente von Burnsideringen

wir benötigen explizite Formeln für die Idempotente von Burnsideringen, um ihre Wirkung auf Ω zu klären. Formeln, die auf der Kombinatorik des Untergruppenverbandes basieren, sind von Yoshida [Yos] mitgeteilt worden. Die Resultate sind wie folgt:

Das Ingredienz der Kombinatorik ist die Inzidenzalgebra (siehe [Aig]). Der Untergruppenverband $S(G)$ wird durch die Inklusion zu einer (teil-)geordneten Menge (poset). Für eine endliche geordnete Menge P und einen Ring A existiert eine Inzidenzalgebra

$$\{f : P \times P \to R \mid x \not\leq y \Rightarrow f(x,y) = 0\}$$

mit der wohldefinierten Verknüpfung $(f * g)(a,b) = \sum_{a \leq x \leq b} f(a,x)g(x,b)$. (Nebenbei bemerkt: Diese Inzidenzalgebra ist gerade der Kategorienring zur Kategorie $R \otimes P$.) Elemente von Interesse sind

$$\begin{array}{lrcl} \text{Kroneckerdelta} & \delta(x,y) & := & \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \text{Zetafunktion} & \zeta(x,y) & := & \begin{cases} 1 & x \leq y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ \text{Möbiusfunktion} & \mu & := & \zeta^{-1}. \end{array}$$

Aus der Gruppentheorie werden folgende Konstruktionen benötigt: Für eine multiplikative Teilmenge $\pi \subset \mathbb{Z}$ (man kann sie ohne Einschränkung als saturiert annehmen, d. h. Teiler von Elementen aus π sind selber auch in π enthalten) und eine endliche Gruppe G existiert genau ein mimimaler Normalteiler $S^\pi G$, für den $G/(S^\pi G)$ eine auflösbare π-Gruppe ist. (π-Gruppe bedeute, daß die Ordnungen der Gruppenelementen Vielfache in π besitzen.) G heiße π-perfekt, falls $G = S^\pi G$. G ist offenbar perfekt genau dann, wenn G $\{1\}$-perfekt ist. Für eine beliebige Untergruppe D und eine π-perfekte Untergruppe H von G sei

$$\begin{array}{rcll} \mathcal{L}_\pi(H) & := & \mathcal{L}_\pi(G,H) := \{A \leq G \mid S^\pi(A) = H\} & \subset S(G) \\ \lambda(D,H) & := & \sum_{S \in \mathcal{L}_\pi(H)} \mu(D,S) & \in R. \end{array}$$

Sei $P_\pi(G) := \{(H) \in \phi(G) \mid H \text{ ist } \pi\text{-perfekt}\}$. Für $(H) \in P_\pi(G)$ sei

$$e_H^\pi := e_{G,H}^\pi := \frac{1}{|N_G H|} \sum_{D \leq N_G H} |D|\lambda(D,H)[G/D] \quad \in R \otimes A_G.$$

Satz 4.1 (Yoshida) $\left\{e_{H,G}^\pi \mid (H) \in P_\pi(G)\right\}$ *ist eine vollständige Menge von primitiven Idempotenten in* $\mathbb{Z}_{(\pi)} \otimes A_G$.

Beweis. Siehe [Yos]. □

Falls $|G| \in \mathbb{Z}_{(\pi)}$ invertierbar ist, ist jede Untergruppe von G π-perfekt, also $\mathcal{L}_\pi(H) = \{H\}$, und die Formel vereinfacht sich drastisch:

$$e_{G,H}^\pi = \frac{1}{|N_G H|} \sum_{D \leq H} |D|\mu(D,H)[G/D] \tag{4.2}$$

Wie operieren diese Idempotente nun auf der Kategorie Ω' und der Algebra $[\Theta']$? Es ist kar, daß die Algebra direkt zerlegt wird, nämlich

$$[\Theta'] \simeq \bigoplus_{H\in\phi(G)} [e_H^{\pi}\Theta'] \simeq \bigoplus_{H\in\phi(G)} e_H^{\pi}[\Theta'].$$

In der Kategorie werden nur die Homomorphismenmengen zerlegt, nicht die Objektmenge. Formal kann dies als Limes darstellt werden:

$$\Omega' \simeq \lim_{(H)} \left(e_H^{|G|}\Omega' \to 0\cdot\Omega\right)$$

Doch was passiert im Detail?

Satz 4.3 *Falls* $(H) \not\leq (K)$, *so ist in* $\mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/A, G/B)$ *ein Morphismus von der Form* $e_H^{|G|}(G/A \leftarrow G/K \to G/B)$ *schon 0.*

Beweis. Nach Formel 2.17 kann man in $\mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/A, G/B)$ "wie im Bursidering" rechnen. Zur Erläuterung der Mechanik der Formel aus Satz 4.1 wird dies explizit getan. Sei $(X) \in \varphi(G)$, $\varphi_X : A'_G \to R$ das Zählen der X-Fixpunkte.

$$\begin{aligned}
\varphi_X(e_H^{|G|}G/K) &= \varphi_X(e_H^{|G|})\varphi_X(G/K)\\
&= \frac{\varphi_X(G/K)}{|N_GH|}\sum_{D\leq H}\mu(D,H)|D|\varphi_X(G/D)\\
&= \frac{\varphi_X(G/K)}{|N_GH|}\sum_{D\leq H}\mu(D,H)|D|\frac{|\{g\in G \mid {}^gX \subset D\}|}{|D|}\\
&= \frac{\varphi_X(G/K)}{|N_GH|}\sum_{g\in G}\sum_{D\leq H}\zeta({}^gX,D)\mu(D,H)\\
&= \frac{\varphi_X(G/K)}{|N_GH|}\sum_{g\in G}\delta({}^gX,H)\\
&= \begin{cases}\varphi_X(G/K) & \text{falls } (X)=(H)\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}
\end{aligned}$$

Also ist $e_H^{|G|}G/K = \varphi_H(G/K)e_H^{|G|}$ (man wende $\prod\varphi_H$ auf die Gleichung an). Nun ist $(H) \not\leq (K)$, also kann G/K keinen H-Fixpunkt besitzen, weshalb $e_H^{|G|}G/K$ die 0 im Burnsidering sein muß. Nach Formel 2.17 ist diese hinreichend für

$$e_H^{|G|}(G/H \leftarrow G/K \to G/B) = 0.$$

□

In der Tat konzentriert sich in $e_H^{|G|}\Omega'$ alles in Morphismen vom Typ (H), nur "verdreht":

Satz 4.4 *Ein Morphismus in* $e_H^{|G|}\mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/A, G/B)$ *ist schon durch seine Komponente vom Typ* (H) *festgelegt, d. h. die kanonische Projektion*

$$\psi_H : e_H^{|G|}\mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/A, G/B) \longrightarrow RW(A, H, B)$$

(siehe Abschnitt 1.3) ist bijektiv.

Beweis. Sei $f \in e_H^{|G|}\mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/A, G/B)$. Nach der Formel 4.2 besteht f nur aus Summanden vom Typ $\leq (H)$. Man schreibe $f = f_H + f_{<H}$, wobei f_H nur aus Summanden vom Typ (H) und $f_{<H}$ nur aus Summanden vom Typ $< (H)$ besteht. Dann gilt

$$\begin{aligned} f &= e_H^{|G|} f && \text{Idempotenz} \\ &= e_H^{|G|} f_H + e_H^{|G|} f_{<H} && \\ &= e_H^{|G|} f_H + 0 && \text{Satz 4.3.} \end{aligned}$$

f wird also schon durch f_H festgelegt, ψ_H ist also injektiv. Um einzusehen, daß ψ auch surjektiv ist, beachte man folgende Gleichung im Burnsidering:

$$\begin{aligned} \frac{|H|}{|N_G H|} G/H \cdot G/H &= \frac{1}{|WH|} \coprod_{HgH} G/H \cap {}^gH \\ &= \frac{1}{|WH|} \coprod_{HgH \in N_G H} G/H + \quad (\text{Orbits} \not\simeq G/H) \\ &= G/H + \quad (\text{Orbits} \not\simeq G/H) \end{aligned}$$

Nach der Formel enthält $e_H^{|G|}$ nur Orbits vom Typ $< G/H$ und eben $\frac{|H|}{|N_G H|} G/H$. Die Multiplikation mit $e_H^{|G|}$ ist also für die Orbits vom Typ (H) die Identität. Dann muß ψ_H surjektiv sein. □

Besonders wichtig ist der Spezialfall $H = A = B$. In diesem Fall sind alle beteiligten Mengen Ringe.

Korollar 4.5 *Die kanonischen Projektionen*

$$\psi_H : e_H^{|G|}\mathrm{End}_{\Omega'}(G/H) \to RWH$$

sind Isomorphismen von Ringen.

Beweis. Klar. □

4.2 Moritaäquivalenzen

Die Ringe $e_H^{|G|}[\Theta']$ sind vorteilhaft, weil sie in natürlicher Weise interessante treu projektive Moduln aufweisen. Treu projektive Moduln geben Anlaß zu Moritaäquivalenzen: Sei A ein Ring, M ein treu projektiver A-Rechtsmodul. Dann ist M auch ein treu projektiver $(\mathrm{End}_A M)$-Linksmodul, und Tensorieren mit M ist eine Äquivalenz von Kategorien

$$A\text{-mod} \to \mathrm{End}_A(M)\text{-mod}, \quad N \mapsto M \otimes_A N,$$

siehe [Knu], S. 53. Ähnliches gilt für Kategorien quadratischer oder Hermitscher Formen.

Satz 4.6 *Sei A ein Ring, P ein A-Rechtsmodul. Die folgenden Eigenschaften sind äquivalent:*

1. *P ist endlich erzeugt und projektiv. Für jeden A-Linksmodul N gilt: $P \otimes_A N = 0 \Rightarrow N = 0$.*
2. *Die Abbildung $\mathrm{Hom}_A(P, A) \otimes_{\mathrm{End}_A P} P \to A$, $\quad f \otimes p \mapsto f(p)$ ist bijektiv.*
3. *Es gibt $p_1, \ldots, p_n \in P$, $f_1, \ldots, f_n \in \mathrm{Hom}_A(P, A)$ mit $\sum_{i=1}^n f_i(p_i) = 1$.*

Moduln mit diesen Eigenschaften heißen treu projektiv.

Beweis. [Knu], S. 52.

□

Was für interessante treu projektive Moduln mag es nun über $[e_H^{|G|}\Theta']$ geben? Hierbei ist die "Quadratform" eines Kategorienringes zu bedenken. Ein Kategorienring besitzt offenbare endlich erzeugte projektive Moduln, nämlich seine Spalten. Diese sind im allgemeinen nicht treu projektiv. Wir werden ein einfaches Kriterium entwickeln, um zu entscheiden, daß ein Spaltenmodul eines Kategorienringes treu projektiv ist.

Im folgenden sei $\mathcal{C}$ eine R-additive Kategorie, $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, $M := \amalg x_i$ ein Generator von $\mathcal{C}$, und $\tilde{\mathcal{C}}$ die volle Unterkategorie von $\mathcal{C}$ mit Objektmenge $\{x_i\}$. Wir hatten in 2.3 ein kommutatives Diagramm von Funktoren

(4.6)
$$\begin{tikzcd}
\tilde{\mathcal{C}}\text{-fpmod} & & \text{fpmod-}\tilde{\mathcal{C}} \\
& \mathbb{P}\mathcal{C} \arrow[ul, "Y"'] \arrow[dl, "S"] \arrow[ur, "Y'"] \arrow[dr, "S'"'] & \\
{[\tilde{\mathcal{C}}]}\text{-fpmod} \arrow[uu, "T"] & & \text{fpmod-}[\tilde{\mathcal{C}}] \arrow[uu, "T'"']
\end{tikzcd}$$
,

wobei $S(y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(y, M)$ und $S'(y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(M, y)$. Man stelle sich $S(y)$ als Spaltenmodul und $S'(y)$ als Zeilenmodul von $[\tilde{\mathcal{C}}] \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(M)$ vor. Mit diesen Konstruktionen läßt es sich rechnen wie in der linearen Algebra:

Lemma 4.7 *Für jedes $y \in \mathrm{ob}(\tilde{C})$ gibts es einen kanonischen Isomorphismus*

$$S(y) \simeq S'(y)^* \text{ und } S'(y) \simeq S(y)^*,$$

wobei * den Funktor $[\tilde{C}]$-Dualraum bezeichnet. Ferner gibt es natürliche Ringisomorphismen

$$\mathrm{End}_{[\tilde{C}]} S(y) \simeq \mathrm{End}_C(y) \simeq \mathrm{End}_{[\tilde{C}]} S'(y).$$

Beweis. Eine Anwendung des Yoneda-Lemmas, siehe [Sch], S. 23. Man hat

$$\begin{array}{rcll}
S(y)^* & = & \mathrm{Hom}_{[\tilde{C}]}(\mathrm{Hom}_{\tilde{C}}(M,y), \mathrm{Hom}_{\tilde{C}}(M,M)) & \\
& = & \mathrm{Hom}_{[\tilde{C}]}(S(y), S(M)) & \\
& \simeq & \mathrm{Hom}_{\tilde{C}\text{-mod}}(TS(y), TS(M)) & T \text{ voll und treu} \\
& \simeq & \mathrm{Hom}_{\tilde{C}\text{-mod}}(Y(y), Y(M)) & \\
& = & \mathrm{Hom}_{\tilde{C}}(\mathrm{Hom}_{C\text{-mod}}(y,?), \mathrm{Hom}_C(M,?)) & \\
& \overset{(*)}{\simeq} & \mathrm{Hom}_C(\mathrm{Hom}_{C\text{-mod}}(y,?), \mathrm{Hom}_C(M,?)) & \\
& \simeq & \mathrm{Hom}_C(M,y) & \text{Yoneda-Lemma} \\
& = & S'(y). &
\end{array}$$

$(*)$ folgt, weil jedes Objekt in C ein Summand einer Summe von Objekten aus $\tilde{C}$ ist. Durch Dualisierung beweist sich $S^* \simeq S'$. Analog ergibt sich die Aussage über die Ringe.

□

Explizit sehen die Isomorphismen so aus:

$$\psi : S(y) \to S'(y)^*,$$

(4.8) $$(y \xrightarrow{f_i} x_i) \mapsto ((x_j \xrightarrow{g_j} y) \mapsto (x_j \xrightarrow{g_j} y \xrightarrow{f_i} x_i))_{i,j} \in [\tilde{C}]$$

Wie erkennt man, daß für $y \in \mathrm{ob}(C)$ $S(y)$ ein treu projektiver $[\tilde{C}]$-Modul ist?

Satz 4.9 *Für $y \in \mathrm{ob}(C)$ gelte: Jede Identität in $\tilde{C}$ faktorisiert in C über y, d. h. für alle $x_i \in \mathrm{ob}(\tilde{C})$ existiert ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
x_i \arrow[rr, "\mathrm{id}"] \arrow[dr] & & x_i \\
& y \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Dann sind $S(y)$ und $S'(y)$ treu projektive $[\Theta']$-Moduln.

Beweis. Es wird Kriterium 3 aus Satz 4.6 angewendet. Für $x_i \in \mathrm{ob}(\tilde{C})$ schreibe $\mathrm{id}_{x_i} =: x_i \xrightarrow{f_i} y \xrightarrow{g_i} x_i$. Es sei

$$\begin{array}{rcl}
q_i & := & (\delta_{ij} g_j)_j \in S(y) \\
p_i & := & (\delta_{ij} f_j)_j \in S'(y),
\end{array}$$

wobei man q_i als Spalten- und p_i als Zeilenmodul auffasse, und δ_{ij} das Kronecker-Delta ist. Sei $\psi : S(y) \to S'(y)^*$ der Isomorphismus aus 4.8. Man erhält

$$\begin{aligned}
\sum_i \psi(q_i)(p_i) &= \sum_i (\delta_{ij} g_j \delta_{ij} f_j)_{i,j} \\
&= \sum_i (\delta_{ij} \mathrm{id}_{x_j})_{i,j} \\
&= 1 \in [\Theta'],
\end{aligned}$$

also ist $S'(y)$ als treu projektive Modul erkannt, und analog verfahre man für $S(y)$. $\square$

Wenden wir dieses Resutat an.

Satz 4.10 *Sei $|G|$ im Ring R invertierber. Dann ist der Ring $[\Theta'] = [R \otimes \Theta]$ Moritaäquivalent zum Ring $\prod_{(H)\in\phi(G)} RWH$. Die Äquivalenz von Kategorien*

$$\mathbb{P}(\Omega') \simeq \mathbb{P}([\Theta']) \longrightarrow \mathbb{P}(\prod RWH)$$

wird durch Tensorieren mit dem $[\Theta']$-$(\prod RWH)$-Bimodul $\prod_{(H)\in\phi(G)} S(G/H)$ gegeben.

Beweis. Die Idempotente des Burnsideringes zerfällen Kategorie und Ring $[\Theta'] \simeq \prod e_H^{|G|}[\Theta']$; es reicht, Moritaäquivalenzen zwischen den Faktoren $e_H^{|G|}[\Theta']$ und RWH anzugeben. Betrachten wir den projektiven $e_H^{|G|}[\Theta']$-Linksmodul
$S(G/H) = \prod_{x\in \mathrm{ob}(\Theta)} \mathrm{Hom}_{e_H^{|G|}}(G/H, x)$. +S
Behauptung: $S(G/H)$ ist treu projektiv.

Wir planen, Satz 4.9 anzuwenden. Zu zeigen ist, daß für jedes $x \in \mathrm{ob}(e_H^{|G|}\Theta')$ die Identität id_x über G/H faktorisiert. Für$(H) \not\leq (K)$ ist $e_H^{|G|}\mathrm{Hom}(G/K, G/K) = 0$ nach Satz 4.3, und darin faktorisiert natürlich alles über G/H. Sei nun ohne Einschränkung $H \leq K$. Wir schreiben die Identität von G/K in $e_H^{|G|}\Omega'$ als

$$\begin{aligned}
\mathrm{id}_{G/K} &= e_H^{|G|}(G/K \xleftarrow{\mathrm{id}} G/K \xrightarrow{\mathrm{id}} G/K) \\
&=: \hat{f}_H + \hat{f}_{<H},
\end{aligned}$$

wobei $\hat{f}_H = (G/K \xleftarrow{n1} nG/H \xrightarrow{1} G/K)$, $n = |W_K H|$ die Summanden von $\mathrm{id}_{G/K}$ vom Typ (H) sind. Wir setzen

$$\begin{aligned}
f_H &:= e_H^{|G|}(G/K \xleftarrow{n1} nG/H \xrightarrow{1} G/H) \\
g_H &:= e_H^{|G|}(G/H \xleftarrow{1} G/H \xrightarrow{1} G/K)
\end{aligned}$$

Behauptung: $\mathrm{id}_{G/K} = g_H \circ f_H$. Es ist

$$
\begin{aligned}
g_H \circ f_H &= e_H^{|G|} \left(\begin{tikzcd}[column sep=small] & G/K \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ G/K & & G/H \end{tikzcd} \circ \begin{tikzcd}[column sep=small] & G/H \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ G/H & & G/K \end{tikzcd} \right) \\
&= e_H^{|G|} \left(\begin{tikzcd}[column sep=small] & G/H \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ G/K & & G/K \end{tikzcd} \right) \\
&= e_H^{|G|} \hat{f}_H \\
&= \mathrm{id}_{G/K}
\end{aligned}
$$

Jede Identität faktorisiert also über G/H, und $S(G/H)$ ist treu projektiv, gibt also Anlaß zu einer Moritaäquivalenz zwischen $[e_H^{|G|}\Theta']$ und $\mathrm{End}_{[e_H^{|G|}\Theta']}(S(G/H))$. Des weiteren gilt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{End}_{[e_H^{|G|}\Theta']}(S(G/H)) &\simeq \mathrm{End}_{e_H^{|G|}\Omega'}(G/H) && \text{Lemma 4.7} \\
&\simeq RWH && \text{Korollar 4.4}
\end{aligned}
$$

Die direkte Summe all dieser Moritaäquivalenzen ergibt dann die gesuchte Moritaäquivalenz zwischen $[\Theta']$ und $\prod RWH$. $\square$

Falls $|G| \in R$ invertierbar, ist die gesamte zusätzliche Struktur, die durch den Burnsidering geliefert wird, nur eine Verschleierung. Leider existieren solche Äquivalenzen nur im lokalisierten Fall und stehen zunächst in keinem offensichtlichem Zusammenhang mit dem natürlichen Ringmorphismus $\Delta : \prod RWH \longrightarrow [\Theta']$.

4.3 K- und L-Theorie

In diesem Abschnitt wird der Ringmorphismus $\Delta' : \prod RWH \to [\Theta']$ und der induzierte Funktor $I\!P\Delta' : I\!P(\prod RWH) \to I\!P([\Theta'])$ untersucht. $I\!P\Delta'$ ist nach Satz (2.4) ein Funktor zwischen äquivalenten Kategorien. Im allgemeinen wird $I\!P\Delta'$ selbst keine Äquivalenz sein. Es wird jedoch nachgewiesen werden, daß $I\!P\Delta'$ noch hinreichend "ähnlich" zu einer Äquivalenz ist , daß er Isomorphien in den K- und L-Gruppen induziert. Die Idee ist, den Funktor $I\!P\Delta'$ nicht direkt zu untersuchen, sondern die Moritaäquivalenz M aus dem vorigen Abschnitt als "Koordinatensystem" zu benutzen:

(4.11)
$$
\begin{tikzcd}
I\!P(\bigoplus RWH) \arrow[rr, "I\!P\Delta'"] \arrow[dr, "F"'] & & I\!P([\Theta']) \arrow[dl, "M"] \\
& I\!P(\bigoplus RWH) &
\end{tikzcd}
$$

Untersucht wird $F := M \circ I\!P\Delta'$, was den Vorteil besitzt, daß man F als Matrix von Funktoren $(F_{H,K}) : \oplus I\!P(RWH) \to \oplus I\!P(RWH)$ auffassen kann. Es wird sich herausstellen, daß F in dieser Form als "unipotente obere Dreiecksmatrix" gesehen werden kann, und es wendet sich das allgemeine Phänomen der algebraischen K-Theorie an: "In obere Dreiecksmatrizen sind nur die Diagonaleinträge relevant." Induziert F Isomorphismen in den K- und L-Gruppen, so natürlich auch $I\!P\Delta'$.

Analysieren wir nun F.

Satz 4.12 *Sei $L = \oplus L_H$ ein projektiver $\prod RWH$-Modul. Dann ist*

$$F(L) \;\simeq\; \bigoplus_{(H)} \left(\bigoplus_{(X)\leq(H)} e_X^{|G|}\mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/H, G/X) \otimes_{RWH} L_H \right)$$

Hierbei ist $e_X^{|G|}\mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/H, G/X)$ der projektive RWH-Rechtsmodul, der durch die Inklusion $RWX \to \mathrm{End}_{\Omega'}(G/X)$ und die Rechtsoperation von $\mathrm{End}_{\Omega'}(G/X)$ auf $e_X^{|G|}\mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/H, G/K)$ gegeben ist.

Beweis. Wir verfolgen den Modul L durch das Diagramm 4.11:

$$\begin{aligned}
& \oplus L_H \\
\overset{P\Delta'}{\mapsto}\; & [\Theta'] \otimes_{(\oplus RWH)} (\oplus L_H) \\
\simeq\; & \left(\bigoplus_{(H)} \left(\bigoplus_{(K)} \mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/H, G/K) \right) \right) \otimes_{(\oplus RWH)} \left(\bigoplus_{(H)} L_H \right) \\
\simeq\; & \bigoplus_{(H)} \left(\bigoplus_{(K)} \mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/H, G/K) \otimes_{RWH} L_H \right) \\
\overset{M}{\mapsto}\; & \bigoplus_{(X)} \left(\left(e_X^{|G|} \bigoplus_{(K)} \mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/K, G/X) \right) \bigotimes_{e_X^{|G|}[\Theta']} e_X^{|G|} \bigoplus_{(H)} \left(\bigoplus_{(K)} \mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/H, G/K) \otimes_{RWH} L_H \right) \right) \\
\simeq\; & \bigoplus_{(X),(H)} \left(e_X^{|G|} \left(\bigoplus_{(K)} \mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/K, G/X) \right) \bigotimes_{e_X^{|G|}[\Theta']} e_X^{|G|} \left(\bigoplus_{(K)} \mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/H, G/K) \right) \otimes_{RWH} L_H \right) \\
\simeq\; & \bigoplus_{(X),(H)} \left(e_X^{|G|}\mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/H, G/X) \otimes_{RWH} L_H \right) \\
\overset{(*)}{\cong}\; & \bigoplus_{(H)} \bigoplus_{(X)\leq(H)} e_X^{|G|}\mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/H, G/X) \otimes_{RWH} L_H
\end{aligned}$$

Schritt $(*)$ folgt aus Satz 4.3, alle anderen sind elemtare Umformungen und Definitionen. $\square$

Nach Korollar (1.5) kann man dies auch so schreiben:

$$
\begin{aligned}
F(L_H) &\simeq \bigoplus_{(H)} \left(\left(e_H^{|G|}\mathrm{End}_{\Omega'}(G/H) \oplus \bigoplus_{(X)<(H)} e_X^{|G|}\mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/H, G/X) \right) \otimes_{RWH} L_H \right) \\
&\simeq \bigoplus_{(H)} \left(L_H \oplus \left(\bigoplus_{(x)<(H)} e_X^{|G|}\mathrm{Hom}_{\Omega'}(G/H, G/X) \otimes_{RWH} L_H \right) \right)
\end{aligned}
$$

Der projektive $\prod RWH$-Modul $L = \oplus L_H$ kommt also unversehrt wieder zum Vorschein, und es treten nur für $(X) < (H)$ zusätzliche Summanden auf. Das ist der angekündigte Monotonieeffekt.

Mit anderen Worten: wählt man eine passende Numerierung $i \mapsto G/H_i$, für die gilt $(H_i) < (H_j) \Rightarrow i < j$, so ist der Funktor F in Matrizenschreibweise $(F_{i,j})$, wobei $F_{i,j} := F_{G/H_i, G/H_j}$, äquivalent zu einem Funktor der Form

$$
\begin{pmatrix} \mathrm{id} & & & * \\ & \mathrm{id} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathrm{id} \end{pmatrix}, \tag{4.13}
$$

d.h. $F \simeq \mathrm{id} + N$, wobei N ein nilpotenter Funktor ist. Erlaubt man formale Inverse, geht man also zur Grothendieckgruppe $K_0(\prod RWH)$ über, so wird die induzierte Abbildung $K_0(F)$ invertierbar: Ihr Inverses ist ⊥c

$$
K_0(F)^{-1} = \frac{1}{\mathrm{id} + K_0(N)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n K_0(N)^n.
$$
⊥ K_0

Das gleiche Argument läßt sich natürlich durchführen, falls die projektiven Moduln mit zusätzlicher Struktur ausgestattet sind, z. B. mit Automorphismen, quadratischen, symetrischen Formen oder Formationen etc. Man erhält

Satz 4.14 *Ist $|G|$ in R invertierbar, so induziert Δ' Isomorphismen in den K_*, L_* und L^*-Gruppen.*

Beweis. Man muß nur überprüfen, daß die fraglichen Funktoren Produkte in Summen verwandeln. Dies ist aber der Fall, z. B. für die K-Theorie:

$$
\begin{aligned}
K_*(\prod RWH) &= \pi_{*+1}(BQ(\prod RWH)) \\
&\simeq \bigoplus \pi_{*+1}(BQ(RWH)) \\
&= \bigoplus K_*(RWH)
\end{aligned}
$$

□

5 Radikale und Komplettierung

In diesem Kapitel wird die Kategorie Ω bzw. die $\mathbb{Z}$-Algebra $[\Theta]$ entlang einer multiplikativen Teilmenge $S \subset \mathbb{Z}$ komplettiert. Allgemein erklärt man für einen Ring A und eine zentrale, multiplikative Teilmenge $S \subset A$ die S-adische Komplettierung

$$A_S^\wedge := \varprojlim_{s \in S} A/sA.$$

Der Limes wird über der Kategorie mit Objektmenge S und Morphismen die Multiplikationen mit Elementen aus S gebildet.

Es wird sich herausstellen, daß für G eine p-Gruppen die Ringe $\prod \mathbb{Z}_p^\wedge WH$ und $[\Theta]_p^\wedge$ nach dem Herausdividieren ihrer Radikale isomorph werden. Da die Funktoren K_0 und L_* invariant beim Herausdividieren von vollständigen Radikalen sind, induzieren sie Isomorphismen. Analoges gilt jedoch im allgemeinen nicht für symetrische L-Gruppen oder höhere K-Gruppen.

5.1 Bestimmung der Radikale

Paradebeispiele für komplettierte Ringe werden durch die p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p^\wedge$ geliefert, p eine Primzahl. Allgemeiner erhält man für ein saturiertes, multiplikatives $S \subset \mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z}_S^\wedge \simeq \prod_{S \ni p \text{ prim}} \mathbb{Z}_p^\wedge$$

Für eine endliche $\mathbb{Z}$-Algebra A ist

$$A_S^\wedge \simeq \mathbb{Z}_S^\wedge \otimes_{\mathbb{Z}} A.$$

Der Ring $\mathbb{Z}_p^\wedge$ ist lokal, mit Radikal $p\mathbb{Z}_p^\wedge$ und Restering $\mathbb{Z}_p^\wedge/p\mathbb{Z}_p^\wedge \simeq \mathbb{Z}/p$. Dementsprechend sind die Ringe $\mathbb{Z}_n^\wedge \simeq \prod_{p|n} \mathbb{Z}_p^\wedge$, p prim, semilokal mit Radikal $\prod_{p|n} p\mathbb{Z}_p^\wedge$ und Restering $\prod_{p|n} \mathbb{Z}/p$, einem halbeinfachen Artinschen Ring. Aus der allgemeinen Theorie folgt, daß endliche Algebren über semilokalen Ringen semilokal bleiben. Das Radikal von Gruppenringen läßt sich bisweilen einfach beschreiben:

Satz 5.1 *Sei R ein Ring, G eine endliche p-Gruppe. Dann ist*

$$\operatorname{rad}(RG) = (\operatorname{rad} R)G \ + \ \bigoplus_{g \in G} R(1-g).$$

Beweis. Siehe [C–R], Korollar (5.25). □

Beispiel 5.2 Für eine p-Gruppe G und dem Ring $\mathbb{Z}_p^\wedge$ ergibt sich hieraus

$$\operatorname{rad}(\mathbb{Z}_p^\wedge G) = p\mathbb{Z}_p^\wedge G + \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z}_p^\wedge(1-g),$$

also $\mathbb{Z}_p^\wedge G/(\operatorname{rad}(\mathbb{Z}_p^\wedge G)) \simeq \mathbb{Z}/p$, und $\mathbb{Z}_p^\wedge G$ ist ein lokaler Ring.

Wir benötigen folgende Eigenschaft:

Lemma 5.3 *Sei G eine endliche p-Gruppe, $H \leq G$ eine nichttriviale Untergruppe. Dann ist*

$$\sum_{h \in H} h \in \operatorname{rad}(\mathbb{Z}_p^\wedge G).$$

Beweis. Es ist

$$\sum_{h \in H} h = \sum_{h \in H} (h-1) + |H| \cdot 1.$$

Der erste Summand liegt im Augmentationsideal, und der zweite ist durch p teilbar. Nach dem obigen Beispiel liegt beides im Radikal. □

Wir wollen nun für eine p-Gruppe G das Radikal von $[\Theta]_p^\wedge$ bestimmen. Dies geschieht in mehreren Schritten. Zuerst werden die Endomorphismenringe $\operatorname{End}_{[\Theta]_p^\wedge}(G/H)$ unter die Lupe genommen. Es sei daran erinnert, daß nach 2.21

$$\operatorname{End}_{[\Theta]_p^\wedge}(G/H) \simeq \mathbb{Z}_p^\wedge WH \oplus I(H)$$

als $\mathbb{Z}$-Modul in einen Ringretrakt $\mathbb{Z}_p^\wedge WH$ und ein Ideal $I(H)$ zerfällt. Das Ideal $I(H)$ spielt bei der Radikalbildung keine Rolle:

Satz 5.4 *Sei G eine beliebige Gruppe. Es ist*

$$\operatorname{rad}(\operatorname{End}_{\Omega_{|G|}^\wedge}(G/H)) \simeq \operatorname{rad}(\mathbb{Z}_{|G|}^\wedge WH) \oplus I(H).$$

Beweis. Wir weisen nach, daß jedes maximale Linksideal M von $\operatorname{End}_{\Omega_{|G|}^\wedge}(G/H)$ von der Form $N \oplus I(H)$ für ein maximales Ideal $N \subset \mathbb{Z}_{|G|}^\wedge WH$ ist, woraus die Behauptung folgt.

Die Projektion $\psi = \psi_H : \operatorname{End}_{\Omega_{|G|}^\wedge}(G/H) \to \mathbb{Z}_{|G|}^\wedge WH$ ist ein surjektiver Ringmorphismus, also ist $\psi(M)$ ein Linksideal in $\mathbb{Z}_{|G|}^\wedge$. Da $1 \notin M$, ist auch $1 \notin \psi(M)$. Man wähle ein maximales Linksideal $N \supset \psi(M)$ in $\mathbb{Z}_{|G|}^\wedge$. Dann ist $N \oplus I(H)$ ein Linksideal, daß M enthält, und da M maximal ist, gilt $M = N \oplus I(H)$. □

Das Hauptresutat dieses Abschnitts ist

Satz 5.5 *Sei G eine p-Gruppe. Dann ist*

$$\operatorname{rad}([\Theta]_p^\wedge) = \left\{ (f_{A,B}) \mid f_{A,B} \in \operatorname{Hom}_{\Omega_p^\wedge}(G/A, G/B); \forall H : f_{H,H} \in \operatorname{rad}(\operatorname{End}_{\Omega_p^\wedge} G/H) \right\}$$

Die Eigenschaft, im Radikal zu liegen, entscheidet sich also nur auf der Diagonalen. Es liegt ein kommutatives Diagramm vor:

$$\begin{tikzcd}
\prod \mathbb{Z}_p^\wedge WH \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\text{modulo rad}"'] & {[\Theta]_p^\wedge} \arrow[d, "\text{modulo rad}"] \\
\mathbb{Z}/p \arrow[r, "\text{id}"] & \mathbb{Z}/p
\end{tikzcd}$$

Der Beweis benötigt etwas Vorarbeit.

Lemma 5.6 *Sei G eine p-Gruppe. Seien $H, K \leq G$, $(H) \neq (K)$. Für $f \in \mathrm{Hom}_{\Omega_p^\wedge}(G/H, G/K)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\Omega_p^\wedge}(G/K, G/H)$ ist*

$$g \circ f \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\Omega_p^\wedge}(G/H)).$$

Beweis. Nach Satz 4.5 kommt es nur auf die Komponenten von $g \circ f$ an, die vom Typ (H) sind. Ohne Einschränkung sei $K > H$, und f, g gegeben durch Diagramme

$$\begin{array}{ccc} & G/H & \\ {}^{a}\swarrow & & \searrow_{b} \\ G/H & & G/K \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{ccc} & G/H & \\ {}^{c}\swarrow & & \searrow_{d} \\ G/K & & G/H \end{array} .$$

Die Komposition errechnet sich nach 2.16 zu

$$\begin{array}{ccc} & \coprod_{g \in H^c \backslash G/H^b} G/H^b \cap H^{cg} & \\ {}^{\amalg b^{-1}a}\swarrow & & \searrow_{\amalg g^{-1}c^{-1}d} \\ G/H & & G/H \end{array} .$$

Welchen Anteil haben die Summanden vom Typ (H) an dieser Komposition? Es ist $G/H \simeq G/(H^b \cap H^{cg})$ genau dann, wenn $H^b = H^{cg}$. Angenommen, es gibt so ein $g \in K$ mit $H^b = H^{cg}$. Dies wird dann auch von jedem Element aus $gN_K(H^b)$ erfüllt. Da K eine p-Gruppe ist und $K > H^b$, gilt auch $N_K(H^b) > H^b$, siehe [Bour], S. 73 Proposition 12. Wieviele Summanden in $\coprod_{H^c \backslash K/H^b} G/H^b \cap H^{cg}$ werden durch $gN_K(H^b)$ geliefert? Für $x \in N_K(H^b)$ gilt:

$$gH^b = gH^bH^b = gg^{-1}H^cgH^b = H^cgH^b,$$
$$gxH^b = gxH^bH^b = gH^bxH^b = gg^{-1}H^cgxH^b = H^cgxH^b$$

Es gilt also $H^cgH^b = H^cgxH^b$ genau dann, wenn $x \in H^b$. Es werden folglich genau $|N_KH^b/H^b| = |W_KH^b| > 1$ Summanden geliefert!

Wenden wir nun den Ringmorphismus ψ_H (siehe 2.20) an. Man erhält dann eine Summe von Elementen der Form

$$\sum_{g \in W_KH^b} d^{-1}cgb^{-1}a = d^{-1}c(\sum_{g \in W_KH^b} g)b^{-1}a$$

Nun ist aber nach Lemma 5.3 $\sum_{g \in W_KH^b} g$ im Radikal von $\mathbb{Z}_p^\wedge WH$ und, da Radikale beidseitige Ideale sind, auch der obige Ausdruck. □

Das folgende simple Lemma sei noch zur Klarheit notiert:

Lemma 5.7 *Sei C eine additive Kategorie, $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{ob}(C)$, $M := \coprod_{i=1}^n x_i$. Sei*

$$F := \begin{pmatrix} f_{11} & & f_{1j} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & f_{jj} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & f_{nj} & & f_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}_C M, \quad f_{ij} \in \mathrm{Hom}_C(x_j, x_i),$$

so daß für alle i f_{ii} linksinvertierbar ist. Dann ist F linksinvertierbar.

Beweis. Die Aussage folgt aus der Darstellung

$$F = \underbrace{\begin{pmatrix} f_{11} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & f_{jj} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & f_{nn} \end{pmatrix}}_{\text{linksinvertierbar}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & & f_{1j} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 0 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & f_{nj} & & 0 \end{pmatrix}}_{\text{nilpotent}}.$$

□

Beweis. **(Von Satz 5.5.)** Zur Vereinfachung der Notation seien die Konjugationsklassen mit $i \mapsto (H_i)$ durchnumeriert, so daß $(H_i) \leq (H_j) \Rightarrow i \leq j$. Sei

$$I := \left\{ (f_{ij}) \mid f_{ij} \in \mathrm{Hom}_{\Omega_p^\wedge}(G/H_i, G/H_j);\ \forall i : f_{ii} \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\Omega_p^\wedge}(G/H_i)) \right\}.$$

Zu zeigen ist: $I = \mathrm{rad}([\Theta]_p^\wedge)$.

"$\subset$". Wir wenden wiederum das Kriterium für einen Ring A an: $a \in \mathrm{rad}A \Leftrightarrow \forall x \in A :\ 1 - xa$ ist linksinvertierbar. Es reicht, diese Eigenschaft auf Erzeugern von I zu überprüfen. Sei $x = (x_{ij}) \in [\Theta]_p^\wedge$ beliebig.

Wir betrachten zunächst ein Diagonalelement der Form

$$a = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_{ii} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \in I, \quad \text{d.h. } a_{ii} \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\Omega_p^\wedge}(G/H_i)).$$

$1 - xa$ ist dann von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & x_{1i}a_{ii} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 - x_{ii}a_{ii} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & x_{ni}a_{ii} & & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{mit } x_{ii}a_{ii} \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\Omega_p^\wedge}(G/H_i)).$$

Nach Lemma 5.7 ist dies linksinvertierbar. Sei nun $a \in I$ ein Element mit einem einzigem nichttrivialen Eintrag a_{ij}, der nicht auf der Diagonalen liegt. $1 - xa$ ist dann von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & x_{1i}a_{ij} & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & & 1 - x_{ji}a_{ij} & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & x_{ni}a_{ij} & & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Lemma 5.6 ist $x_{ji}a_{ij} \in \mathrm{rad}(\mathrm{End}_{\Omega_p^\wedge}(G/H_j))$, und Lemma 5.7 läßt sich wiederum anwenden. Da I von Elementen dieser Form erzeugt wird, ist I in $\mathrm{rad}([\Theta]_p^\wedge)$ enthalten.

"$\supset$". Offenbar ist $[\Theta]_p^\wedge/I$ halbeinfach, und sein Radikal verschwindet. $\mathrm{rad}([\Theta]_p^\wedge)$ ist nun gerade das kleinste Ideal mit dieser Eigenschaft (siehe z. B. [C–R], S. 104), also gilt $\mathrm{rad}[\Theta]_p^\wedge \subset I$.

Das angegebene Diagramm ist offenbar. □

5.2 Anwendungen

Sei weiterhin G eine p-Gruppe. Aus Satz 5.5 ergibt sich ein kommutatives Diagramm von Funktoren:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}(\prod \mathbb{Z}_p^\wedge WH) \arrow[r] \arrow[d, "\mathbb{P}\Delta_p^\wedge"'] & \mathbb{P}([\Theta]_p^\wedge) \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \mathbb{P}(\prod \mathbb{Z}/p) \arrow[r] & \mathbb{P}(\prod \mathbb{Z}/p) \end{tikzcd}$$

Ein Funktor, der die Reduktion nach dem vollständigen Radikal auf Isomorphismen abbildet, wirft also auch $\Delta_{p*}^\wedge$ auf einen Isomorpismus. Dies ist der Fall für K_0 ("Liften von Idempotenten") und L_* ("Hensels Lemma"), siehe [Wal]. Für die höheren K-Gruppen ist das natürlich im allgemeinen nicht der Fall. Auch die symmetrischen L-Gruppen sind in der Regel nicht invariant unter Reduktion nach dem Radikal, obwohl sie sich von den quadratischen L-Gruppen natürlich nur um 2-primäre Torsion unterscheiden. Das einfachste Beispiel ist $\mathbb{Z}/2 \simeq L^0(\mathbb{Z}/2) \not\simeq L^0(\mathbb{Z}_2^\wedge) \simeq \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$, siehe [Ran2], S.

424. Ist für einen Ring A $\frac{1}{2} \in A$, so liefert der Symmetrisierungsoperator jedoch eine Isomorphie $L_*(A) \simeq L^*(A)$. In unserem Fall trifft das genau für $2 \not| \, |G|$ zu, denn

$$\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}^{\wedge}_{|G|} \simeq \prod_{p| \, |G|} \mathbb{Z}^{\wedge}_p \quad \Leftrightarrow \quad 2 \not| \, |G|.$$

Zusammengefaßt:

Satz 5.8 *Sei G eine p-Gruppe. Für $\Delta^{\wedge}_p : \oplus \mathbb{Z}^{\wedge}_p WH \to [\Theta]^{\wedge}_p$ gilt*

1. *$K_0(\Delta^{\wedge}_p)$ ist ein Isomorphismus.*
2. *$L_*(\Delta^{\wedge}_p)$ ist ein Isomorphismus.*
3. *Gilt $2 \not| \, |G|$, so ist auch $L^*(\Delta^{\wedge}_p) \simeq L_*(\Delta^{\wedge}_p)$ ein Isomorphismus.*

6 Exakte Sequenzen

In diesem Kapitel werden die Resultate aus allen vorangegangen zusammengetragen und verwertet. Dazu werden in K- und L-Theorie Mayer-Vietoris-Sequenzen für arithmetische Quadrate eingesetzt. Die befriedigendsten Resultate werden für die quadratischen L-Gruppen für p-Gruppen erziehlt. Es wird ein vollständiges Zerlegungsresultat

$$\bigoplus L_n^h(\mathbb{Z}WH) \xrightarrow{\simeq} L_n(\Omega)$$

mitgeteilt, das die L-Gruppen der Kategorie Ω mit den einfachen L-Gruppen der Gruppenringe identifiziert. Für L^* und K_0 werden jeweils schwächere Resultate erzielt.

6.1 Exakte Sequenzen in der K-Theorie

In diesem Abschnitt werden die K-Gruppen der Kategorie Ω mit den K-Gruppen des Ringes $\prod \mathbb{Z}WH$ durch exakte Sequenzen verglichen. Das Hauptresultat ist, daß für p-Gruppen $K_0(\prod \mathbb{Z}WH) \to K_0(\mathbb{P}\Omega)$ surjektiv ist.

Für die Ringe $\prod \mathbb{Z}WH$ und $[\Theta]$ liegen arithmetische Quadrate (Lokalisierung-Komplettierung) vor, und es existiert ein Morphismus von eben diesen Quadraten:

$$\begin{tikzcd}
& {[\Theta]} \arrow[rr] \arrow[dd] & & {[\Theta][|G|^{-1}]} \arrow[dd] \\
\bigoplus \mathbb{Z}WH \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \bigoplus \mathbb{Z}[|G|^{-1}]WH \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
& {[\Theta]^\wedge_{|G|}} \arrow[rr] & & {[\Theta] \otimes \mathbb{Q}^\wedge_{|G|}} \\
\bigoplus \mathbb{Z}^\wedge_{|G|} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \bigoplus \mathbb{Q}^\wedge_{|G|}WH \arrow[ur] &
\end{tikzcd} \tag{6.1}$$

Nach [Wei] erhält man für jedes arithmetische Quadrat eine lange exakte Mayer-Vietoris-Sequenz; diese Konstruktion ist natürlich. Aus dem Diagramm 6.1 ergibt sich sodann ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] \\
K_n(\prod \mathbb{Z}WH) \arrow[r] \arrow[d] & {} & K_n(\prod \mathbb{Z}^\wedge_{|G|}WH) \arrow[d] & \oplus & K_n(\prod \mathbb{Z}[|G|^{-1}]WH) \arrow[r] \arrow[d] & {} & K_n(\prod \mathbb{Q}^\wedge_{|G|}WH) \arrow[d] \\
K_n([\Theta]) \arrow[r] \arrow[d] & {} & K_n([\Theta]^\wedge_{|G|}) \arrow[d] & \oplus & K_n([\Theta][|G|^{-1}]) \arrow[r] \arrow[d] & {} & K_n([\Theta] \otimes \mathbb{Q}^\wedge_{|G|}) \arrow[d] \\
K_n(\Delta) \arrow[r] \arrow[d] & {} & K_n(\Delta^\wedge_{|G|}) \arrow[d] & \oplus & K_n(\Delta[|G|^{-1}]) \arrow[r] \arrow[d] & {} & K_n(\Delta \otimes \mathbb{Q}^\wedge_{|G|}) \arrow[d] \\
K_{n-1}(\prod \mathbb{Z}WH) \arrow[r] \arrow[d] & {} & K_{n-1}(\prod \mathbb{Z}^\wedge_{|G|}WH) \arrow[d] & \oplus & K_{n-1}(\prod \mathbb{Z}[|G|^{-1}]WH) \arrow[r] \arrow[d] & {} & K_{n-1}(\prod \mathbb{Q}^\wedge_{|G|}WH) \arrow[d] \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots
\end{tikzcd}$$

Hierbei sind $K_n(\Delta)$ etc. natürlich die relativen K-Gruppen des Ringmorphismus Δ.

Nach Satz 4.14 sind die induzierte Abbildungen in den Termen der lokalisierten Ringe Isomorphismen, d. h. $K_n(\Delta[|G|^{-1}]) = K_n(\Delta \otimes \mathbb{Q}^\wedge_{|G|}) = 0$, demnach also $K_n(\Delta) \simeq K_n(\Delta^\wedge_{|G|})$. Die Hindernisse für Isomorphismen in den ganzzahligen Ringen liegen also vollständig in den komplettierten Ringen. Obiges Diagramm kollabiert zu einem exakten Zopf:

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny]
K_n(\prod \mathbb{Q}^\wedge_{|G|}WH) \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & K_n([\Theta]) \arrow[rr, bend left] \arrow[dr] & & K_n(\Delta^\wedge_{|G|}) \\
& K_n(\prod \mathbb{Z}WH) \arrow[ur] \arrow[dr] & & K_n([\Theta]^\wedge_{|G|}) \oplus K_n([\Theta][|G|^{-1}]) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
K_{n+1}(\Delta^\wedge_{|G|}) \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & K_n(\prod \mathbb{Z}^\wedge_{|G|}) \oplus K_n(\prod \mathbb{Z}[|G|^{-1}]WH) \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & K_n(\prod \mathbb{Q}^\wedge_{|G|}WH)
\end{tikzcd} \tag{6.2}$$

Satz 6.3 *Sei G eine p-Gruppe. Dann ist die Abbildung*

$$K_0(\prod \mathbb{Z}WH) \to K_0([\Theta])$$

surjektiv.

Beweis. Nach Satz 5.8 ist die Abbildung $K_0(\prod \mathbb{Z}_p^\wedge WH) \to K_0([\Theta]_p^\wedge)$ bijektiv, also $K_0(\Delta_p^\wedge) = 0$. Die Aussage folgt nun aus dem exakten Zopf oder aus dem Diagramm nach dem "4er-Lemma", einer schwachen Form des 5er-Lemmas ([Sch]). □

Das Hindernis für eine Isomorphie im obigen Satz ist somit das Nichtverschwinden von $K_1(\Delta_p^\wedge)$. Obwohl die Ringe $[\Theta]_p^\wedge$ und $\prod \mathbb{Z}WH$ semilokal sind, ist es mir nicht gelungen, ihre K_1-Gruppen zu berechnen, obwohl sie ja Quotienten der Einheitengruppen nach bekannten Relationen sind (siehe [Vas]).

6.2 Zerlegungen von L-Gruppen

Dieser Abschnitt enthält eine Analyse der exakten Sequenzen, die die verschiedenen L-Gruppen miteinander in Beziehung setzen, und kulminiert in dem Zerlegungsresultat für p-Gruppen:

$$L_n(\Omega) \simeq \bigoplus L_n^h(\mathbb{Z}WH).$$

Die quadratischen L-Gruppen sind wegen ihrer 4-er Periodizität $L_n \simeq L_{n+4}$ besonders handlich. Für sie steht "Hensels Lemma" voll zur Verfügung.

Zunächst muß man sich um die korrekte Dekoration der L-Gruppen kümmern. Die folgende Tatsache ist dabei nützlich:

Lemma 6.4 *Sei R ein Ring, für den $K_0(\mathbb{Z}) \to K_0(R)$ injektiv ist. Dann sind auch*

$$K_0(\mathbb{Z}) \to K_0([R \otimes \Theta]),$$
$$K_0(\mathbb{Z}) \to K_0(\prod RWH)$$

injektiv.

Beweis. Es gibt einen Ringmorphismus $R \otimes [\Theta] \to R$. Man bilde einfach $\phi \in [\Theta] \otimes R$ auf das Element $a \in R$ ab, das der Koeffizient des Bestandteils $G/G \to G/G \leftarrow G/G \in \mathrm{Hom}_\Omega(G/G, G/G)$ von ϕ ist. Dieses liefert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} & K_0(R \otimes [\Theta]) \arrow[dr] & \\ K_0(\mathbb{Z}) \arrow[ur] \arrow[rr] & & K_0(R) \end{tikzcd},$$

also ist $K_0(\mathbb{Z}) \to K_0([\Theta] \otimes R)$ injektiv. Für die Gruppenringe verwende man die Augmentation $RWH \to R$ für das gleiche Argument. $\square$

Mit anderen Worten: freie $(R \otimes [\Theta])$- oder $\prod RWH$-Moduln besitzen einen wohlbestimmten Rang.

Definieren wir nun die Abbildung

$$\oplus L_*^h(\mathbb{Z}WH) \longrightarrow L_*(\Omega).$$

Wir übersetzen das Problem wieder in die Sprache der Ringtheorie. Es ist $K_0(\Omega) = \bigoplus_{(H)} \mathbb{Z} = \mathbb{Z}^{|\phi(G)|}$. Es sei

$$S := \mathrm{bild}(K_0(\Omega)) \to K_0(I\!P\Omega)).$$

Nach Beispiel 2.3 ist $K_0(\Omega) \to K_0(I\!P\Omega)$ injektiv, also ist $S \simeq \mathbb{Z}^{|\phi(G)|}$. Man erhält nun

$$L_*(\Omega) \simeq L_*^S(I\!P\Omega) \simeq L_*^S([\Theta]). \tag{6.5}$$

Es sei $S' \subset K_0(\oplus \mathbb{Z}WH)$ die involutionsinvariante Untergruppe, die von den projektiven $\prod \mathbb{Z}WH$-Moduln erzeugt wird, die direkte Summande von freien $\mathbb{Z}WH$-Moduln sind, d. h. S' wird von den Bildern der Inklusionen $K_0(\mathbb{Z}) \to K_0(\mathbb{Z}WK) \to K_0(\prod \mathbb{Z}WH)$ erzeugt. Es ist also

$$S' \simeq \mathbb{Z}^{|\phi(G)|} \simeq S.$$

S' respektiert die Zerlegung $K_0(\prod \mathbb{Z}WH) \simeq \oplus K_0(\mathbb{Z}WH)$, und $\Delta_*(S') = S$. Man erhält nunmehr

$$L_*^{S'}(\prod \mathbb{Z}WH) \simeq \prod L_*^h(\mathbb{Z}WH),$$

und kann den gesuchten Homomorphismus definieren als

$$\oplus L_*^h(\mathbb{Z}WH) \simeq L_*(\prod \mathbb{Z}WH) \xrightarrow{\Delta_*} L_*^S([\Theta]) \simeq L_*(\Omega) \tag{6.6}$$

Um diesen Homomorphismus zu analysieren, werden wir wieder Mayer-Vietoris - Sequenzen heranziehen. Für die Existens von Mayer-Vietoris-Sequenzen für relative L-Gruppen siehe [Ran3], §6. Wir identifizieren jeweils $S' \subset K_0(\prod \mathbb{Z}WH)$ mit seinen (injektiven) Bildern in $K_0(\prod \mathbb{Z}^\wedge_{|G|}WH)$ etc., ebenso verfhren wir mit $S \subset K_0([\Theta])$. Dann sind die Quadrate

$$\begin{array}{ccccccc}
S' & \longrightarrow & S' & \quad & \tilde{K}_0(\prod \mathbb{Z}WH) & \longrightarrow & \tilde{K}_0(\prod \mathbb{Z}^\wedge_{|G|}WH) \\
\downarrow & & \downarrow \subset & & \downarrow & & \downarrow \\
S' & \longrightarrow & S' & & \tilde{K}_0(\prod \mathbb{Z}[|G|^{-1}]WH) & \longrightarrow & \tilde{K}_0(\prod \mathbb{Q}^\wedge_{|G|}WH)
\end{array}$$

und

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\subset"] & \tilde{K}_0([\Theta]) \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{K}_0([\theta]^{\wedge}_{|G|}) \arrow[d] \\
S \arrow[r] & S & \tilde{K}_o([\Theta][|G|^{-1}]) \arrow[r] & \tilde{K}_0([\Theta] \otimes \mathbb{Q}^{\wedge}_{|G|})
\end{tikzcd}
$$

cartesisch im Sinne von [Ran3], S. 498, und nach [Ran3] Proposition 6.3.1 erhält man exakte Mayer-Vietoris-Sequenzen, die aufgrund der Wahl der S, S' natürlich bezüglich des Ringmorphismus Δ sind:

$$
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] \\
L_n^{S'}(\prod \mathbb{Z}WH) \arrow[r] \arrow[d] & L_n^{S'}(\prod \mathbb{Z}^{\wedge}_{|G|}WH) \arrow[d] & \oplus & L_n^{S'}(\prod \mathbb{Z}[|G|^{-1}]WH) \arrow[r] \arrow[d] & L_n^{S'}(\prod \mathbb{Q}^{\wedge}_{|G|}WH) \arrow[d] \\
L_n^{S}([\Theta]) \arrow[r] \arrow[d] & L_n^{S}([\Theta]^{\wedge}_{|G|}) \arrow[d] & \oplus & L_n^{S}([\Theta][|G|^{-1}]) \arrow[r] \arrow[d] & L_n^{S}([\Theta] \otimes \mathbb{Q}^{\wedge}_{|G|}) \arrow[d] \\
L_n^{S,S'}(\Delta) \arrow[r] \arrow[d] & L_n^{S,S'}(\Delta^{\wedge}_{|G|}) \arrow[d] & \oplus & L_n^{S,S'}(\Delta[|G|^{-1}]) \arrow[r] \arrow[d] & L_n^{S,S'}(\Delta \otimes \mathbb{Q}^{\wedge}_{|G|}) \arrow[d] \\
L_{n-1}^{S'}(\prod \mathbb{Z}WH) \arrow[r] \arrow[d] & L_{n-1}^{S'}(\prod \mathbb{Z}^{\wedge}_{|G|}WH) \arrow[d] & \oplus & L_{n-1}^{S'}(\prod \mathbb{Z}[|G|^{-1}]WH) \arrow[r] \arrow[d] & L_{n-1}^{S'}(\prod \mathbb{Q}^{\wedge}_{|G|}WH) \arrow[d] \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots
\end{tikzcd}
$$

Hierbei sind die $L_n^{S,S'}(\Delta)$ etc. die relativen L-Gruppen des Morphismus Δ, für ihre Definition siehe [Ran3], §2.5.

Lemma 6.7 *Sei R der Ring $\mathbb{Z}[|G|^{-1}]$ oder $\mathbb{Q}^{\wedge}_{|G|}$. Dann ist die Abbildung*

$$L_*^{S'}(\prod RWH) \to L_*^{S}(R \otimes [\Theta])$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Die Rothenbergsequenz sieht in diesem Falle so aus:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & L_n^{S'}(\prod RWH) \arrow[r] \arrow[d] & L_n(\prod RWH) \arrow[r] \arrow[d] & \hat{H}^n(\mathbb{Z}/2, \tilde{K}_0(\prod RWH)) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & L_n^{S}([R \otimes \Theta]) \arrow[r] & L_n(R \otimes [\Theta]) \arrow[r] & \hat{H}^n(\mathbb{Z}/2, \tilde{K}_0(R \otimes [\Theta])) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Nach zahlreichen Sätzen sind die beiden rechten vertikalen Homomorphismen bijektiv, nach dem 5-er Lemma also auch der linke. □

Das obige exakte Diagramm kollabiert folglich zu einem Zopf:

$$\begin{tikzcd}[column sep=tiny] L_n(\prod \mathbb{Q}^\wedge_{|G|} WH) \arrow[dr] \arrow[rr, bend left] & & L_n([\Theta]) \arrow[dr] \arrow[rr, bend left] & & L_n(\Delta^\wedge_{|G|}) \\ & L_n(\prod \mathbb{Z} WH) \arrow[ur] \arrow[dr] & & L_n([\Theta]^\wedge_{|G|}) \oplus L_n([\Theta][|G|^{-1}]) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ L_{n+1}(\Delta^\wedge_{|G|}) \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & L_n(\prod \mathbb{Z}^\wedge_{|G|}) \oplus L_n(\prod \mathbb{Z}[|G|^{-1}] WH) \arrow[ur] \arrow[rr, bend right] & & L_n(\prod \mathbb{Q}^\wedge_{|G|} WH) \end{tikzcd} \tag{6.8}$$

Dies gilt für beliebige Gruppen G. Wie man sieht, liegt das Hindernis für eine Isomorphie für die integralen Ringe wieder nur in dem Term $L_n^{S,S'}(\Delta^\wedge_{|G|})$ zum komplettierten Ring. Für p-Gruppen verschwinden es jedoch:

Lemma 6.9 *Sei G eine p-Gruppe. Dann ist*

$$L_*^{S'}(\prod \mathbb{Z}_p^\wedge WH) \to L_*^S([\Theta]_p^\wedge)$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Analog zum Beweis des obigen Lemmas. In der Rothenbergsequenz zu $\mathbb{Z}_p^\wedge$ ist die mittlere Abbildung eine Isomorphie, da quadratische L-Gruppen invariant sind unter dem Herausdividieren eines vollständigen Radikals sind.

$$\begin{tikzcd} L_n(\prod \mathbb{Z}_p^\wedge WH) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\simeq"'] & L_n(\prod \mathbb{Z}/p) \arrow[d, "\simeq"] \\ L_n([\Theta]_p^\wedge) \arrow[r, "\simeq"] & L_n(\prod \mathbb{Z}/p) \end{tikzcd} .$$

Da $\tilde{K}_0$ ebenfalls invariant ist, wird auch eine Isomorphie in den Tate-Kohomologiegruppen induziert. □

Ist G eine p-Gruppe, so verschwindet also $L_*^{S,S'}(\Delta_p^\wedge)$, und der exakte Zopf 6.8 kollabiert. Das liefert das Hauptresultat dieser Arbeit:

Satz 6.10 *Sei G eine p-Gruppe. Dann ist*

$$\bigoplus L_n^h(\mathbb{Z}WH) \xrightarrow{\simeq} L_n(\Omega)$$

eine Isomorphie.

Im allgemeinen erhält man nur eine exakte Sequenz aus dem Zopf:

$$\cdots \to L_{n+1}^{S,S'}(\Delta_{|G|}^\wedge) \to \bigoplus L_n^h(\mathbb{Z}WH) \to L_n(\Omega) \to L_n^{S,S'}(\Delta_{|G|}^\wedge) \to \cdots \tag{6.11}$$

und Entsprechendes für die symmetrischen L-Gruppen. Verzichtet man auf die Kenntnis der 2-primären Torsion, so ergibt sich das Resultat erstaunlicherweise für alle Gruppen:

Satz 6.12 *Sei G beliebig. Dann ist*

$$\bigoplus L_n(\mathbb{Z}WH) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \xrightarrow{\simeq} L_n(\Omega) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}]$$

ein Isomorphismus.

Beweis. Die Dekoration der L-Gruppen spielt keine Rolle, da sich alles nur um 2-primäre Torsion unterscheiden könnte. Also gilt das gleiche Resultat für die symmetrischen L-Gruppen.

Nach [Ran3], Proposition 3.6.4 sind die Lokalisierungsabbildungen

$$\begin{array}{ccc}
L_*(\prod \mathbb{Z}WH) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow{\simeq} & L_*(\prod \mathbb{Z}[|G|^{-1}]WH) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \\
\Delta_* \big\downarrow & & \big\downarrow \Delta[|G|_*^{-1}] \\
L_*([\Theta]) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] & \xrightarrow{\simeq} & L_*([\Theta][|G|^{-1}WH]) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]
\end{array}$$

Isomorphismen. Und $\Delta[|G|^{-1}]_*$ ist nach Satz 4.14 ein Isomorphismus. □

Literatur

[Aig] M. Aigner: *Combinatorial Theory*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1974.

[Bass] H. Bass: *Algebraic K-Theory*. Benjamin, New York 1968.

[Bour] N. Bourbaki: *Algèbre, Chapitres 1 à 3*, C.L.L.S, Paris 1970.

[Br] K. S. Brown: *Cohomology of Groups*. Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1982.

[C–R] C. W. Curtis, I. Reiner: *Methods of Representation Theory I*. Wiley, New York 1990.

[tD1] T. tom Dieck: *Transformation Groups and Representation Theory*. Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1979.

[tD2] T. tom Dieck: *Transformation Groups*. De Gruyter, New York 1987.

[Dr] A. Dress: Contributions to the Theory of Induced Representations. *Algebraic K-Theory, Proc. Conf. Seattle 1972*, Springer Lecture Notes in Math. 342, 182–240.

[G–W] S. Geller, C. Weibel: $K_1(A, B, I)$. *J. Reine Angew. Math.* **342** (1983), 12–35.

[Knus] M.-A. Knus: *Quadratic and Hermitian Forms over Rings*. Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1991.

[Kli] L. Klingler: Integral Representations of Groups of Square–Free–Order. *J. Algebra* **129** Nr. 1 (1990).

[Lau] R. C. Laudenbacher: On the K-Theory of $\mathbb{Z}G$, G a Group of Square–Free–Order. *Algebraic K-Theory: Connections with Geometry and Topologie*, Kluwer, Dodrecht–Boston–Berlin 1989.

[Lueck] W. Lück: *Transformation Groups and Algebraic K-Theory*. Lect. Notes Math. **1408**, Springer, Berlin–Heidelberg–Heidelberg–New York 1989.

[L–M] W. Lück, I. Madsen: Equivariant L-Theory I. *Math. Z.* **203** (1990), 503–526.

[Mac] S. MacLane: *Categories for the Working Mathematican*. Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1971.

[M–R] J. Milgram, A. Ranicki: *Algebraic and Geometric Surgery*. Unveröffentlicht.

[Mil] J. Milnor: *Introduction to Algebraic K-Theory*, Princeton U. P., Princeton 1971.

[Mit] B. Mitchell: Rings with several Objects. *Adv. Math.* **8** (1971), 1–161.

[Quil] D. Quillen: Higher Algebraic K-Theory I. *Higher K-Theorie I, Proc. Conf. Seattle 1974*, Lect. Notes Math. **341**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 85–147.

[Qui2] D. Quillen: On the Cohomology and K-Theory of the General Linear Group over a Finite Field. *Ann. Math.* **96** (1972), 552–586.

[Ran1] A. Ranicki: Algebraic L-Theory, I Foundations. *Proc. Lond. Math. Soc.* **40** Nr. 3 (1979), 87–192.

[Ran2] A. Ranicki: *Exact Sequences in the Algebraic Theory of Surgery.* Princeton U. P., Princeton 1981.

[Ran3] A. Ranicki: Additive L-Theory. *K-Theory* **3** (1989), 163–195 .

[Ran4] A. Ranicki: *Algebraic L-Theory and Toplological Manifolds*, Cambridge U. P., Cambridge 1992.

[Sch] H. Schubert: *Kategorien I*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1970.

[Sri] V. Srinivas: *Algebraic K-Theory*, Birkhäuser, Boston–Basel–Berlin 1991.

[T-T] R. W. Thomason, R. Trobaugh: Higher algebraic K-Theory of Schemes and Derived Categories. *The Grothendiek Festschrift Vol. III*, Birkhäuser Boston–Basel–Berlin 1990,247–435.

[Vas] L. N. Vaseršteĭn: On the Stabilisation of the General Linear Group over a Ring. *Math. USSR Sbornik* **8** (1969), 383–400.

[Wald] F. Waldhausen: Algebraic K-Theory of Spaces. *Algebraic and Geometric K-Theory*, Lect. Notes Math. **1126**, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1985, 318–419.

[Wall1] C. T. C. Wall: *Surgery on Compact Manifolds.* Academic Press, London–New York 1971.

[Wall2] C. T. C. Wall: On the Classification of Hermitian Forms III: Complete Semilocal Rings. *Invent. Math.* **19** (1973)59–71.

[Wall3] C. T. C. Wall: On the Classification of Hermitian Forms V: Group Rings. *Ann. Math.* **103** (1976), 1–80.

[Wei] C. Weibel: K-Theory and Analytic Isomorphisms. *Invent. Math* **61** (1980), 177–197.

[Yos] T. Yoshida: Idempotents of Burnsiderings and Dress Induction Theorem. *J. Alg.* **80** (1985), 95–105.