

Kontraktionen von Schemata

Dissertation

Vorgelegt von
Stefan Schröer

Angefertigt am
Mathematischen Institut
der
Ruhr-Universität
1998

Einleitung

In dieser Arbeit studieren wir Kontraktionen von Schemata und wenden sie auf Probleme über algebraische Flächen und relative Kurven an. Unter einer Kontraktion wollen wir im Folgenden einen eigentlichen Morphismus $f : X \rightarrow Y$ mit $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_*(\mathcal{O}_X)$ bijektiv verstehen. Topologisch betrachtet sind dies überaus einfache Abbildungen, da der Raum Y der Quotient von X nach der Relation $f(x_1) = f(x_2)$ ist.

Solche Morphismen spielen in der Klassifikationstheorie eine fundamentale Rolle, da das Schema Y als Vereinfachung des Schemas X interpretiert werden kann. Zahlreiche Sätze der algebraischen Geometrie haben die Existenz einer Kontraktion zum Inhalt. Zum Beispiel besagt das klassische Kriterium von Castelnuovo, dass man auf einer glatten algebraischen Fläche X eine integrale Kurve $R \subset X$ mit $R^2 < 0$ und $R \cdot K_X < 0$ kontrahieren kann, und mittels Mori-Theorie und dem Programm des Minimalen Modells wird versucht, dies auf höhere Dimensionen zu verallgemeinern.

Kontraktionen spielen ebenfalls in der Strukturtheorie von Schemata eine prominente Rolle, häufig im Zusammenhang mit Abstiegstheorie. In der Regel existieren Kontraktionen über einem gegebenen Basisschema nicht, manchmal jedoch nach einem Basiswechsel, zum Beispiel der Henselisierung, und üben vermöge des treu-flachen Abstiegs ihren Einfluss aus.

Die Existenz oder Nicht-Existenz einer Kontraktion ist meistens nicht einfach nachzuweisen. Ein Hilfsmittel zur Konstruktion von projektiven Kontraktionen sind invertierbare \mathcal{O}_X -Moduln \mathcal{L} , für die eine genügend hohe Potenz $\mathcal{L}^{\otimes n}$ mit $n > 0$ global erzeugt ist. Wir bezeichnen solche Moduln als kontraktiv und fassen sie als Verallgemeinerungen von ample Moduln auf. Das *geometrische* Problem, ob eine Kontraktion existiert, lässt sich häufig auf das *algebraische* Problem zurückführen, ob ein invertierbarer Modul kontraktiv ist. Obschon dies noch kein leichtes Problem ist, lässt es sich mit den kohomologischen Methoden der Garbentheorie behandeln und ist in vieler Hinsicht zugänglicher.

Diesem Ansatz folgend werden wir kohomologische Kriterien für kontraktive Garben entwickeln, die in Analogie zu den bekannten kohomologischen Kriterien für ample Garben stehen, und diese Kriterien in den einfachsten Spezialfällen, nämlich algebraische Flächen und relative Kurven, anwenden.

Die vorliegende Untersuchung ist in fünf Kapitel gegliedert:

Der Kern dieser Arbeit wird vom ersten Kapitel gebildet, in dem kohomologische Charakterisierungen von kontraktiven Moduln durch Endlichkeitsbedingungen entwickelt werden, und diese Resultate auf den Fall von Vektorbündeln verallgemeinert werden.

Im zweiten Kapitel wenden wir kontraktive Garben an, um die kontrahierbaren Kurven auf normalen algebraischen Flächen zu charakterisieren. Als Anwendung verallgemeinern wir das klassische Castelnuovo-Kriterium.

Im dritten Kapitel studieren wir Faserungen auf normalen algebraischen Flächen, also Kontraktionen mit 1-dimensionalem Bild, und charakterisieren die Faserungen, deren generische Faser vom Geschlecht 0 ist, durch eine numerische Bedingung.

Im vierten Kapitel wenden wir unsere Resultate auf die Klassifikation von normalen Flächen von Kodaira-Dimension $-\infty$ an. Wir führen das Programm des minimalen Modells durch und zeigen, dass sich so eine Fläche entweder auf eine minimale del-Pezzo-Fläche kontrahieren lässt oder eine Faserung vom Geschlecht 0 erlaubt. Wir klassifizieren dann eine gewisse Sorte von minimalen del-Pezzo-Flächen.

Im letzten Kapitel studieren wir die Struktur von relativen Kurven über lokalen noetherschen Basisschemata und lokalen noetherschen Kurven. Wir werden unter anderem die affinen offenen Teilmengen und kontrahierbaren Kurven charakterisieren. Dabei steht die Problematik des treu-flachen Abstiegs von der Henselisierung im Vordergrund.

Ich bedanke mich herzlich bei meinem Betreuer Prof. Hubert Flenner für seine Unterstützung und Anregungen. Ich möchte mich auch bei Bernd Siebert für zahlreiche interessante Gespräche bedanken. Weiterhin bedanke ich mich beim Garduiertenkolleg „Geometrie und Mathematische Physik“ für die geleistete Unterstützung.

Inhaltsverzeichnis

1. Kohomologische Kriterien gegen Basispunkte	4
1.1. Kontraktive Garben	5
1.2. Ampelheit auf dem Basisort	9
1.3. Verallgemeinerungen für Vektorbündel	12
1.4. Existenz von Divisoren	16
2. Birationale Kontraktionen von normalen Flächen	21
2.1. Der pseudo-effektive Kegel	22
2.2. Charakterisierung von Kontraktionen	27
2.3. Verbesserung von Zyklen	29
2.4. Verbesserung von Divisoren	33
2.5. Anwendungen und Beispiele	35
3. Faserungen von normalen Flächen	39
3.1. Allgemeine Beobachtungen	40
3.2. Faserungen vom Geschlecht 0	42
3.3. Charakterisierung dieser Faserungen	44
3.4. Zwei Lemmata über Kurven	49
4. Normale del-Pezzo-Flächen	52
4.1. Flächen mit negativer kanonischer Klasse	52
4.2. Minimale Faserungen	54
4.3. Mutationen	58
4.4. Minimale del-Pezzo-Flächen	62
4.5. Bemerkungen über Kettenbrüche	66
5. Relative Kurven	68
5.1. Henselsche Basisschemata	68
5.2. Kurven vom Geschlecht 0	70
5.3. Nicht-Existenz von Kontraktionen	73
5.4. Affine offene Teilmengen	76

1. Kohomologische Kriterien gegen Basispunkte

Sei X ein quasi-kompaktes und quasi-separiertes Schema. In diesem Kapitel untersuchen wir invertierbare \mathcal{O}_X -Moduln \mathcal{L} , für die ein Vielfaches $\mathcal{L}^{\otimes n}$ mit $n > 0$ *global erzeugt* ist. Da solche Moduln häufig vorkommen, geben wir ihnen einen eigenen Namen und bezeichnen sie als *kontraktive* Moduln. Dies ist folgendermaßen motiviert: Unter einer *Kontraktion* oder einem *Stein-Faktor* von X versteht man ein Schema Y und einen eigentlichen Morphismus $h : X \rightarrow Y$ mit $\mathcal{O}_Y \rightarrow h_*(\mathcal{O}_X)$ bijektiv. Ist X eigentlich über einem noetherschen Ring A , so werden Kontraktionen zum Beispiel durch global erzeugte invertierbare \mathcal{O}_X -Moduln, oder allgemeiner kontraktive Moduln \mathcal{L} geliefert: man wähle für das Schema Y das homogene Spektrum der graduierten Algebra $\Gamma(X, \text{Sym } \mathcal{L})$ und für h den kanonischen Morphismus. Auf diese Weise lässt sich jeder projektive Stein-Faktor gewinnen, und man kann kontraktive und global erzeugte Moduln als Verallgemeinerung von ampeln und sehr ampeln Moduln interpretieren.

Wie kann man entscheiden, ob ein invertierbarer Modul kontraktiv ist? Falls der Modul nicht bereits global erzeugt ist, muss er *Basispunkte* besitzen. Unser Hauptresultat ist eine hinreichende Bedingung für Kontraktivität, welche die Endlichkeit gewisser Kohomologiegruppen von Garben auf der Menge der Basispunkte verlangt. Als Anwendung erhalten wir folgendes Prinzip: Ein Modul, der auf seinen Basispunkten ampel ist, muss kontraktiv sein. Dieses Resultat ist eine Verallgemeinerung eines klassischen Satzes von Zariski über glatte algebraische Schemata, welcher besagt, dass ein effektiver Divisor mit diskretem Basisort ein global erzeugtes Vielfaches besitzt [19, thm. 6.2, p. 579].

Dieses Kapitel ist folgendermaßen gegliedert: Im ersten Abschnitt führen wir den Begriff der Kontraktivität im absoluten und relativen Fall ein, in Analogie zum Grothendieckschen Begriff von ampeln Garben. Im Fall von eigentlichen Schemata geben wir eine Charakterisierung der Kontraktivität durch die Endlichkeit gewisser Kohomologiegruppen an. Im zweiten Abschnitt beweisen wir unsere zentrale Aussage: Ein Modul ist kontraktiv, wenn er auf seinen Basispunkten ampel ist. Im dritten Abschnitt verallgemeinern wir diese Resultate auf *Vektorbündel*. Im letzten Abschnitt charakterisieren wir die invertierbaren Moduln \mathcal{L} , die isomorph zu $\mathcal{O}_X(D)$ für eine Divisor D sind.

1.1. Kontraktive Garben

In diesem Abschnitt geben wir eine Definition von kontraktiven Garben, die den Begriff der amplen Garbe [EGA II, 4.5.3] verallgemeinert, und werden diese Garben für eigentlichen Schemata durch eine *kohomologische* Bedingung charakterisieren.

(1.1.1) Sei X ein Schema, \mathcal{L} ein invertierbarer \mathcal{O}_X -Modul, $\mathcal{S} = \text{Sym}(\mathcal{L})$ seine symmetrische Algebra, und $S = \Gamma(X, \mathcal{S})$ die graduierte Algebra der globalen Schnitte. Dann gibt es eine maximale offene Teilmenge $U \subset X$, auf der die Adjunktionsabbildung $S \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{S}$ einen Morphismus $U \rightarrow \text{Proj}(S)$ definiert; dies ist die Menge aller Punkte $x \in X$, an denen ein homogenes Element aus S_+ nicht verschwindet.

Man sagt, dass \mathcal{L} ample ist, wenn das Schema X quasi-kompakt und separiert ist und eine offene Einbettung $X \rightarrow \text{Proj}(S)$ definiert wird. Schwächen wir diese Bedingung ab, kommen wir in natürlicher Weise zu folgender

(1.1.2) Definition. *Wir sagen, dass \mathcal{L} ein kontraktiver Modul ist, wenn das Schema X quasi-kompakt und quasi-separiert ist und $S \otimes \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{S}$ einen Morphismus $X \rightarrow \text{Proj}(S)$ definiert.*

Wegen der Quasi-Kompaktheit ist so ein Modul kontraktiv genau dann, wenn eine Potenz $\mathcal{L}^{\otimes n}$ mit $n > 0$ global erzeugt ist. Wir fordern Quasi-Separiertheit aus folgendem Grund: Ist s ein globaler Schnitt von $\mathcal{L}^{\otimes n}$, so ist nach [EGA I, 6.8.2] die affine offene Teilmenge $D_+(s) \subset \text{Proj}(S)$ die affine Hülle der offenen Teilmenge $X_s \subset X$; demnach ist der Morphismus $X \rightarrow \text{Proj}(S)$ bereits vollständig durch das System all dieser offenen Teilmengen $X_s \subset X$ bestimmt.

Wir haben auch einen relativen Begriff: Ist $f : X \rightarrow Z$ ein Morphismus, so bezeichnen wir einen invertierbaren \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{L} als relativ kontraktiv, oder f -kontraktiv, wenn es eine offene affine Überdeckung $U_i \subset Z$ gibt so, dass die Einschränkungen von \mathcal{L} auf $f^{-1}(U_i)$ kontraktiv sind.

Offenbar ist jeder ample Modul kontraktiv. Einige einfache Eigenschaften von amplen Moduln übertragen sich auf kontraktive Moduln: \mathcal{L} ist kontraktiv genau dann, wenn $\mathcal{L}^{\otimes n}$ für ein $n > 0$ kontraktiv ist. Das Tensorprodukt von zwei kontraktiven Moduln ist kontraktiv. Das Urbild eines kontraktiven Moduls unter einem quasi-kompakten, quasi-separierten Morphismus ist kontraktiv. Eine fundamentale Eigenschaft von amplen Moduln gilt allerdings nur mit zusätzlicher Hypothese:

(1.1.3) Proposition. Sei X ein $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -Schema für eine ganze Zahl $n \neq 0$, und $X' \subset X$ ein abgeschlossenes Unterschema mit nilpotentem Ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$. Ein invertierbarer \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{L} ist kontraktiv genau dann, wenn seine Einschränkung auf X' kontraktiv ist.

Angenommen, die Einschränkung \mathcal{L}' ist kontraktiv. Durch Induktion nach dem Grad der Nilpotenz können wir $\mathcal{I}^2 = 0$ annehmen, und durch Übergang zu Vielfachen erreichen wir, dass \mathcal{L}' global erzeugt ist. Betrachten wir die exakte Sequenz

$$H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n} | X') \xrightarrow{\partial} H^1(X, \mathcal{I} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n});$$

nach [EGA II, 4.5.13.4] gilt $\partial(s'^{\otimes n}) = ns'^{\otimes(n-1)} \otimes \partial(s')$ für jeden Schnitt s' von \mathcal{L}' . Da diese Klasse auf einem $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ -Schema verschwindet, gibt es einen globalen Schnitt von $\mathcal{L}^{\otimes n}$, der sich zu $s'^{\otimes n}$ einschränkt, somit ist $\mathcal{L}^{\otimes n}$ global erzeugt. QED.

(1.1.4) Bemerkung. Diese Aussage ist falsch über allgemeineren Grundringen. Sei zum Beispiel k ein algebraisch abgeschlossener Grundkörper von Charakteristik 0. Sei X' ein eigentliches integrires Schema, \mathcal{I} ein kohärenter $\mathcal{O}_{X'}$ -Modul mit $H^1(X', \mathcal{I}) \neq 0$, und X eine infinitesimale Erweiterung durch \mathcal{I} . Gemäß der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow H^1(X, \mathcal{I}) \longrightarrow \text{Pic}(X) \longrightarrow \text{Pic}(X')$$

findet sich ein nicht-trivialer invertierbarer \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{L} , dessen Einschränkung \mathcal{L}' trivial, also kontraktiv ist; da $H^1(X, \mathcal{I})$ torsionsfrei ist, gilt dies auch für alle Potenzen $\mathcal{L}^{\otimes n}$ mit $n \neq 0$. Ein globaler Schnitt von \mathcal{L} , der an einer Stelle $x \in X$ nicht verschwindet, müsste an allen Stellen nicht verschwinden, da X' integer ist. Also besitzt \mathcal{L} eine kontraktive Einschränkung, ohne selber kontraktiv zu sein.

(1.1.5) Einen Punkt $x \in X$, an dem \mathcal{L} nicht global erzeugt ist, bezeichnet man als *Basispunkt*, und die entsprechende abgeschlossene Teilmenge $X' \subset X$ als *Basisort* von \mathcal{L} . Wie bezeichnen den Durchschnitt aller Basisorte $X_n \subset X$ der Potenzen $\mathcal{L}^{\otimes n}$ mit $n > 0$ als den Basisort der symmetrischen Algebra $\mathcal{S} = \text{Sym}(\mathcal{L})$.

Ist $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt mit Ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ und Restekörper $k = \kappa(x)$, so erhalten wir eine exakte Sequenz

$$H^0(X, \mathcal{S}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{S} \otimes k) \xrightarrow{\partial} H^1(X, \mathcal{S} \otimes \mathcal{I}),$$

deren mittlere Gruppe isomorph zum Polynomring $k[T]$ ist. Wie sich herausstellen wird, ist diese exakte Sequenz der Schlüssel für die nachfolgenden kohomologischen Kriterien für Kontraktivität. Wir halten zunächst fest:

(1.1.6) Lemma. *Angenommen, eine der folgenden Bedingungen ist erfüllt:*

- (i) *Der S -Modul $H^1(X, \mathcal{I} \otimes \mathcal{S})$ ist noethersch, mit anderen Worten, er ist vom endlichen Typ über einem noetherschen Quotienten S' von S .*
- (ii) *Es gibt einen noetherschen Unterring $S' \subset S$, über dem $H^1(X, \mathcal{I} \otimes \mathcal{S})$ von endlichem Typ ist.*

Dann kann x kein Basispunkt von \mathcal{S} sein.

Angenommen, $x \in X$ ist ein Basispunkt. Dann wird das irrelevante Ideal $\mathcal{S}_+(x) = Tk[T]$ injektiv in die Kohomologiegruppe $H^1(X, \mathcal{I} \otimes \mathcal{S})$ eingebettet, vom irrelevanten Ideal S'_+ annulliert, und ist als S'_0 Modul nicht vom endlichen Typ. Also kann keine der obigen Bedingungen erfüllt sein. QED.

(1.1.7) Bemerkung. Man kann in der obigen Aussage den abgeschlossenen Punkt $x \in X$ durch ein abgeschlossenes Unterschema $X' \subset X$ ersetzen, auf dem die Einschränkung von \mathcal{L} kontraktiv ist.

Wir können obige Beobachtung ausnutzen, um zusammen mit den Endlichkeitssätzen von Grothendieck eine Charakterisierung von kontraktiven Garben für eigentliche Schemata zu deduzieren:

(1.1.8) Theorem. *Sei Y ein lokal noethersches Schema, $f : X \rightarrow Y$ ein eigentlicher Morphismus, \mathcal{L} ein invertierbarer \mathcal{O}_X -Modul, und $\mathcal{S} = \text{Sym}(\mathcal{L})$ seine symmetrische Algebra. Die folgenden Bedingungen sind äquivalent:*

- a) *Die Garbe \mathcal{L} ist relativ kontraktiv.*
- b) *Für jeden kohärenten \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{M} und jede natürliche Zahl p ist $R^p f_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{S})$ ein $f_*(\mathcal{S})$ -Modul von endlichem Typ.*
- c) *Es gibt eine quasi-kohärente, graduierte \mathcal{O}_Y -Algebra \mathcal{R} von endlichem Typ und einen f -Homomorphismus $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$ so, dass für jeden kohärenten \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{M} und jede natürliche Zahl p die Garbe $R^p f_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{S})$ ein \mathcal{R} -Modul von endlichem Typ ist.*

d) Für jedes kohärente Ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ ist $R^1 f_*(\mathcal{I} \otimes \mathcal{S})$ ein noetherscher $f_*(\mathcal{S})$ -Modul.

Der Begriff der noetherschen Modul-Garbe bedarf eines Kommentars. Ist \mathcal{A} eine quasi-kohärente \mathcal{O}_X -Algebra und \mathcal{F} eine quasi-kohärente \mathcal{A} -Modulgarbe, so sagen wir, dass \mathcal{F} noethersch ist, wenn sie über einer affinen Überdeckung zu noetherschen Moduln assoziiert ist. Anders formuliert: das Trägerschema von \mathcal{F}^\sim auf $\text{Spec}(\mathcal{A})$ ist lokal noethersch und der Modul darauf kohärent.

Gilt die Bedingung c), so ist $f_*(\text{Sym } \mathcal{L})$ als endlicher \mathcal{R} -Modul eine \mathcal{O}_Y -Algebra vom endlichen Typ, und wir können $\mathcal{R} = f_*(\text{Sym } \mathcal{L})$ setzen; folglich sind alle Bedingungen lokal, und wir können annehmen, dass Y das Spektrum eines noetherschen Ringes A ist. Sei $S = \Gamma(X, \text{Sym } \mathcal{L})$.

Die Implikation c) \Rightarrow d) ist trivial, und d) \Rightarrow a) ergibt sich aus (1.1.6). Angenommen, es gilt b); da $S_0 = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ eine endliche A -Algebra und $S_+ = \Gamma(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{S})$ ein S -Modul vom endlichen Typ ist, muss S nach [EGA II, 2.1.4] eine A -Algebra vom endlichen Typ sein, und die Bedingung c) ist erfüllt. Es bleibt die Implikation a) \Rightarrow b) zu verifizieren. Angenommen, es gibt eine natürliche Zahl $n > 0$ so, dass die Behauptung für die Potenz $\mathcal{L}^{\otimes n}$ erfüllt ist. Dann ist die Summe der Veronese-Moduln

$$H^p(X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{S}) = \bigoplus_{i=0}^{n-1} H^p(X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes i} \otimes \mathcal{S}^{(n)})$$

offenbar ein S -Modul vom endlichen Typ; wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass \mathcal{L} von endlich vielen globalen Schnitten s_1, \dots, s_m erzeugt wird. Sei $R \subset S$ die davon erzeugte graduierte Unter algebra. Ist \mathcal{M} ein kohärenter \mathcal{O}_X -Modul, so ist $\mathcal{M} \otimes \mathcal{S}$ vom endlichen Typ über $R \otimes \mathcal{O}_X$, und nach [EGA III, 3.3.1] ist $H^p(X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{S})$ ein R -Modul, also a priori auch ein S -Modul vom endlichen Typ. QED.

Wir notieren folgende geometrische Anwendung:

(1.1.9) Korollar. Sei Y ein noethersches Schema, $f : X \rightarrow Y$ ein eigentlicher Morphismus, \mathcal{L} ein kontraktiver invertierbarer \mathcal{O}_X -Modul, $\mathcal{S} = \text{Sym}(\mathcal{L})$ seine symmetrische Algebra, P das homogene Spektrum von $f_*(\mathcal{S})$, und

$$X \xrightarrow{h} P \xrightarrow{g} Y$$

die kanonische Faktorisierung von f . Dann ist g ein projektiver Morphismus, h ein eigentlicher Morphismus, und $\mathcal{O}_P \rightarrow h_*(\mathcal{O}_X)$ eine bijektive Abbildung.

Ist $z \in Z$ ein Punkt und $R \subset X_z$ eine irreduzible abgeschlossene Kurve, so ist $h(R)$ ein Punkt genau dann, wenn die Einschränkung \mathcal{L}_R numerisch trivial ist.

Wir sahen, dass $f_*(\mathcal{S})$ vom endlichen Typ ist, also ist g projektiv. Da g separiert und die Verkettung $f = g \circ h$ eigentlich ist, muss h eigentlich sein. Nach [EGA III, 1.4.5] ist $\mathcal{O}_P \rightarrow h_*(\mathcal{O}_X)$ bijektiv. Ist $\mathcal{L}^{\otimes n}$ relativ global erzeugt, so ist es das Urbild eines relativ amplen \mathcal{O}_P -Moduls \mathcal{N} . Folglich ist $h(R)$ ein Punkt genau dann, wenn die Einschränkung \mathcal{L}_R eine Torsionsklasse in $\text{Pic}(R)$ liefert. QED.

1.2. Ampelheit auf dem Basisort

Es ist nicht einfach, das Kriterium in (1.1.8) anzuwenden, da man die Endlichkeit von $R^p f_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{S})$ für *alle* kohärenten Garben \mathcal{M} überprüfen muss. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass es reicht, nur den Fall $p = 1, 2$ und solche Garben zu betrachten, die von den Basispunkten von \mathcal{L} getragen werden. Ein zentrale Resultat dieser Arbeit ist folgendes

(1.2.1) Theorem. *Sei Y ein lokal noethersches Schema, $f : X \rightarrow Y$ ein eigentlicher Morphismus, \mathcal{L} ein invertierbarer \mathcal{O}_X -Modul, und $\mathcal{S} = \text{Sym}(\mathcal{L})$ seine symmetrische Algebra. Sei \mathcal{R} eine quasi-kohärente, graduierte \mathcal{O}_Y -Algebra von endlichem Typ, $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{S}$ ein f -Homomorphismus, $U \subset X$ eine offene Teilmenge, auf der $U \rightarrow \text{Proj}(\mathcal{R})$ definiert ist, und $X' \subset X$ ein abgeschlossenes Unterschema mit Träger $X \setminus U$. Wenn für jeden kohärenten $\mathcal{O}_{X'}$ -Modul \mathcal{M} die \mathcal{R} -Moduln $R^1 f_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{S})$ und $R^2 f_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{S})$ von endlichem Typ sind, dann ist \mathcal{L} eine relativ kontraktive Garbe.*

Das Problem ist lokal, also können wir annehmen, dass Y das Spektrum eines noetherschen Ringes A ist, und setzen $R = \Gamma(Y, \mathcal{R})$ und $S = \Gamma(X, \mathcal{S})$. Wir halten zunächst fest, dass $H^1(X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{S})$ und $H^2(X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{S})$ für *jeden* kohärenten \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{M} mit Träger in X' von endlichem Typ über R sind: Sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Y$ das Ideal von $X' \subset X$ und $X_n \subset X$ das abgeschlossene Unterschema mit Ideal \mathcal{I}^n , also die n -te infinitesimale Umgebung von X' . Da X noethersch und \mathcal{M} kohärent ist, gilt $\mathcal{I}^n \mathcal{M} = 0$ für ein hinreichend großes n , und wir können \mathcal{M} auch als \mathcal{O}_{X_n} -Modul betrachten. Angenommen, unsere Behauptung gilt induktiv für alle kohärenten \mathcal{O}_{X_n} -Moduln; ist \mathcal{M} ein kohärenter $\mathcal{O}_{X_{n+1}}$ -Modul, erhalten wir eine exakte Sequenz

$$H^p(X, \mathcal{I}^n \mathcal{M} \otimes \mathcal{S}) \longrightarrow H^p(X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{S}) \longrightarrow H^p(X, \mathcal{M}/\mathcal{I}^n \mathcal{M} \otimes \mathcal{S});$$

da $\mathcal{I}^n \mathcal{M}$ und $\mathcal{M}/\mathcal{I}^n \mathcal{M}$ von \mathcal{I}^n annulliert werden, sind für $p = 1, 2$ die äußeren Terme R -Moduln vom endlichem Typ; da R noethersch ist, muss auch der mittlere Term von endlichem Typ sein.

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass R eine Unter algebra von S ist. Durch Übergang zu geeigneten Vielfachen können wir annehmen, dass \mathcal{L} von endlich vielen globalen Schnitten s_0, \dots, s_n auf U erzeugt wird. Wir werden nun zeigen, dass für *jeden* kohärenten \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{M} der R -Modul $H^1(X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{S})$ vom endlichem Typ ist. Wenden wir das Prinzip der noetherschen Induktion an, können wir unterstellen, dass diese Behauptung für jeden kohärenten \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{N} , dessen Träger eine *echte* Teilmenge von $\text{Supp}(\mathcal{M})$ ist, bereits gilt. Seien T_0, \dots, T_n Unbestimmte und $\mathbb{Z}[T_0, \dots, T_n] \rightarrow S$ der Homomorphismus, der die Unbestimmte T_i auf das Element s_i abbildet; sei $P = P_{\mathbb{Z}}^n$ das homogene Spektrum von $\mathbb{Z}[T_0, \dots, T_n]$ und $g : U \rightarrow P$ der Morphismus [EGA II, 4.2.3] zur Surjektion $\bigoplus T_i \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{L}$. Da X ein noethersches Schema und \mathcal{M} ein kohärenter Modul ist, muss $\text{Ass}(\mathcal{M} \mid U) = \text{Ass}(\mathcal{M}) \cap U$ eine endliche Menge sein [EGA IV, 3.1.6]. Es gibt also eine natürliche Zahl $n > 0$ und einen globalen Schnitt p von $\mathcal{O}_P(n)$ so, dass

$$g(\text{Ass}(\mathcal{M}) \cap U) \subset P_p$$

gilt [EGA II, 4.2.3]. Fassen wir p als homogenes Polynom vom Grad n in den Unbestimmten T_0, \dots, T_n auf [EGA III, 2.1.12] und substituieren die globalen Schnitte s_i , so erhalten wir einen globalen Schnitt s von $\mathcal{L}^{\otimes n}$, dessen Einschränkung auf U das Urbild von p ist; es gilt also

$$\text{Ass}(\mathcal{M}) \cap U \subset X_s.$$

Erweitern wir den Unterring $R \subset S$, so können wir $s \in R$ erreichen. Indem wir \mathcal{L} durch seine n -te Potenz ersetzen, können wir annehmen, dass $n = 1$ gilt. Seien kohärente \mathcal{O}_X -Moduln \mathcal{F} und \mathcal{N} durch die exakte Sequenz

$$(1.2.1.1) \quad 0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\text{id} \otimes s} \mathcal{M} \otimes \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{N} \otimes \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

definiert, und sei \mathcal{K} der Kokern von $\text{id} \otimes s$. Nach Konstruktion ist $\text{id} \otimes s$ auf U injektiv [EGA IV, 3.1.9], also gilt $\text{Supp}(\mathcal{F}) \subset X'$; folglich ist $H^2(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{S})$ ein R -Modul vom endlichem Typ. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden: Angenommen, die Menge $\text{Ass}(\mathcal{M}) \cap U$ ist leer; in diesem Fall gilt $\text{Supp}(\mathcal{M}) \subset X'$, folglich ist $H^1(X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{S})$ nach Voraussetzung ein R -Modul vom endlichem Typ. Nehmen wir also an, dass es einen zu \mathcal{M} assoziierten Punkt $x \in U$ gibt;

nach Konstruktion ist $(\text{id} \otimes s)_x$ bijektiv, also verschwindet \mathcal{N}_x , und $\text{Supp}(\mathcal{N})$ ist eine *echte* Teilmenge von $\text{Supp}(\mathcal{M})$; nach der Induktionshypothese ist $H^1(X, \mathcal{N} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{S})$ ein R -Modul vom endlichem Typ. Tensorieren wir die exakte Sequenz (1.2.1.1) mit dem lokal freien \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{S} , erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \otimes \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{M} \otimes \mathcal{S} \xrightarrow{\text{id} \otimes s} \mathcal{M} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{N} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{S} \longrightarrow 0,$$

und $\mathcal{K} \otimes \mathcal{S}$ ist der Kokern von $\text{id} \otimes s$. Setzen wir zur Abkürzung $K = H^1(X, \mathcal{K} \otimes \mathcal{S})$ und $H = H^1(X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{S})$, so ergibt sich aus der obigen exakten Sequenz das kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen

$$\begin{array}{ccccc} H^2(X, \mathcal{F} \otimes \mathcal{S}) & \longleftarrow & K & \xleftarrow{\phi} & H \\ & & \simeq \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes s \\ & & K & \xrightarrow{\psi} & H \longrightarrow H^1(X, \mathcal{N} \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{S}). \end{array}$$

Der graduierte Homomorphismus $\text{id} \otimes s : H \rightarrow H$ vom Grad 1 erlaubt also eine Faktorisierung

$$H \xrightarrow{\phi} K \xrightarrow{\psi} H;$$

nach unserer Induktionshypothese sind die R -Moduln $H/\psi(K)$ und $K/\phi(H)$ vom endlichem Typ. Seien $h_1, \dots, h_m \in H$ homogene Elemente, deren Klassen in $H/\psi(K)$ ein Familie von R -Erzeugern bilden, und $k_1, \dots, k_n \in K$ homogene Elemente, deren Klassen in $K/\phi(H)$ eine Familie von R -Erzeugern bilden. Zeigen wir, dass die Elemente h_1, \dots, h_m und $\psi(k_1), \dots, \psi(k_n)$ den R -Modul H erzeugen: Sei $h \in H$ ein homogenes Element vom Grad d . Gilt $d = 0$, so muss dieses Element eine Linearkombination in den h_1, \dots, h_m sein. Angenommen, es gilt $d > 0$. Ändere ich h um eine Linearkombination der h_i ab, kann ich erreichen, dass es im Bild von ψ liegt; ändere ich es um eine Linearkombination der $\psi(k_j)$ ab, kann ich annehmen, dass es von der Form $h = sh'$ für ein Element $h' \in H$ vom Grad $d - 1$ ist; durch Induktion nach dem Grad kann ich unterstellen, dass h' eine Linearkombination der obigen Erzeugern ist.

Wir haben somit gezeigt, dass $H^1(X, \mathcal{M} \otimes \mathcal{S})$ ein R -Modul vom endlichem Typ ist; nach (1.1.6) muss \mathcal{L} kontraktiv sein. QED.

Es gibt Situationen, in denen das obige Kriterium *trivialerweise* erfüllt ist. Zum Beispiel erhalten wir folgendes

(1.2.2) Korollar. *Voraussetzungen wie in (1.2.1). Wenn alle Fasern des Basisortes $X' \cap f^{-1}(y)$ diskret sind, dann ist \mathcal{L} eine relativ kontraktive Garbe.*

Nach [EGA IV, 18.12.4] ist X' ein endliches, also affines Y -Schema; nach dem Kriterium von Serre [EGA III, 5.2.2] verschwinden die Garben $R^p f_*(\mathcal{M})$ für *alle* natürlichen Zahlen $p > 0$ und *alle* quasi-kohärenten $\mathcal{O}_{X'}$ -Moduln; die Voraussetzungen von (1.2.1) sind also erfüllt. QED.

Das obige Korollar ist selber ein Spezialfall von folgendem nützlichem Resultat:

(1.2.3) Korollar. *Voraussetzungen wie in (1.2.1). Wenn die Einschränkungen von \mathcal{L} auf die Fasern des Basisorts $X' \cap f^{-1}(y)$ ampel sind, dann ist \mathcal{L} eine relativ kontraktive Garbe.*

Das Problem ist lokal in Y , also können wir ohne Einschränkung annehmen, dass Y noethersch ist. Nach [EGA IV, 9.6.4] ist die Einschränkung von \mathcal{L} auf den Basisort X' relativ ampel. Sei \mathcal{M} ein kohärenter $\mathcal{O}_{X'}$ -Modul; nach dem Verschwindungssatz von Serre [EGA III, 2.2.1] gibt es eine natürliche Zahl n_0 so, dass $R^p f_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0$ für alle $p > 0$ und alle $n > n_0$ gilt. Nach dem Endlichkeitssatz [EGA III, 2.2.1] sind alle $R^p f_*(\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n})$ als \mathcal{O}_Y -Moduln von endlichem Typ, und die Behauptung folgt mit $\mathcal{R} = \mathcal{O}_Y$ aus (1.2.1). QED.

1.3. Verallgemeinerungen für Vektorbündel

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die vorangegangenen Begriffe und Resultate über invertierbare Moduln auf *Vektorbündel*. Wir verwenden folgende Notation: Ein Vektorbündel ist ein lokal freier Modul von endlichem Typ. Ist X ein Schema und \mathcal{E} ein \mathcal{O}_X -Vektorbündel, so sei $P = P(\mathcal{E})$ das homogene Spektrum von $\text{Sym}(\mathcal{E})$ und $f : P \rightarrow X$ die Projektion. Wir setzen $\mathcal{L} = \mathcal{O}_P(1)$ für den tautologischen relativ sehr ampel invertierbaren \mathcal{O}_P -Modul. Es gilt $\text{Sym}(\mathcal{E}) = f_*(\text{Sym } \mathcal{L})$. Unser Ansatz ist, die Eigenschaften des Vektorbündels \mathcal{E} auf die Eigenschaften des Geradenbündels \mathcal{L} zurückzuführen.

(1.3.1) Man bezeichnet ein Vektorbündel \mathcal{E} als *ampel*, wenn der invertierbare Modul \mathcal{L} ampel ist. Dieser Begriff wurde von Hartshorne [7, 3.2, p. 69]

für algebraische Schemata über abgeschlossenen Körpern eingeführt. Es bieten sich mehrere sinnvolle Definitionen für den Begriff des kontraktiven Vektorbündels an; wir verwenden folgende

(1.3.2) Definition. *Wir bezeichnen ein \mathcal{O}_X -Vektorbündel \mathcal{E} als kontraktiv, wenn der invertierbare \mathcal{O}_P -Modul \mathcal{L} kontraktiv ist.*

Im Folgenden sei $S = \Gamma(X, \text{Sym } \mathcal{E}) = \Gamma(P, \text{Sym } \mathcal{L})$. Ist \mathcal{E} kontraktiv, so erhalten wir einen Morphismus $g : P \rightarrow \text{Proj}(S)$. Ist $x \in X$ ein Punkt, so ist \mathcal{L} auf der Faser P_x ampel. Wenn $\mathcal{L}^{\otimes n}$ auf P_x global erzeugt ist, so ist die Garbe $\mathcal{O}_{\text{Proj}(S)}(n)$ am Bild $g(P_x)$ invertierbar und $\mathcal{L}^{\otimes n}$ ihr Urbild; folglich enthalten die Fasern von $P_x \rightarrow \text{Proj}(S)$ keine abgeschlossenen Kurven.

(1.3.3) Für Vektorbündel sind mehrere sinnvolle Begriffe von Basispunkten denkbar. Wir verwenden folgende Sprechweise: Wir sagen, dass ein Punkt $x \in X$ mit Restkörper $k = \kappa(x)$ ein *Basispunkt* ist, wenn die Abbildung von Ringen

$$\Gamma(X, \text{Sym } \mathcal{E}) \otimes k \longrightarrow \Gamma(X, \text{Sym } \mathcal{E} \otimes k)$$

nicht endlich ist. Hierbei ist die rechte Gruppe isomorph zur Polynomalgebra $k[T_0, \dots, T_d]$, wobei $d + 1$ der Rang des Vektorbündels ist.

Wir sagen, dass $x \in X$ ein *schwacher Basispunkt* von $\text{Sym}(\mathcal{E})$ ist, wenn für alle natürlichen Zahlen $n > 0$ die Abbildung

$$\Gamma(X, \text{Sym}^n \mathcal{E}) \otimes k \longrightarrow \Gamma(X, \text{Sym}^n \mathcal{E} \otimes k)$$

nicht surjektiv ist. Offenbar ist ein Basispunkt ein schwacher Basispunkt.

(1.3.4) Proposition. *Ein Punkt $x \in X$ ist ein Basispunkt von $\text{Sym}(\mathcal{E})$ genau dann, wenn er das Bild eines Basispunktes $p \in P$ von $\text{Sym}(\mathcal{L})$ ist.*

Sei $P' \subset P$ die Faser des Punktes $x \in X$. Angenommen, x ist kein Basispunkt. Es gilt $\Gamma(X, \text{Sym } \mathcal{E} \otimes k) = \Gamma(P, \text{Sym } \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{P'})$, und für jeden Punkt $p \in P'$ ist die Abbildung

$$\Gamma(P, \text{Sym } \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{P'}) \otimes \kappa(p) \longrightarrow \Gamma(P, \text{Sym } \mathcal{L} \otimes \kappa(p))$$

surjektiv; folglich kann p kein Basispunkt sein. Angenommen, die Faser P' ist disjunkt zum Basisort. Dann gibt es eine natürliche Zahl $m > 0$ und endlich viele globale Schnitte s_0, \dots, s_n von $\text{Sym}^m(\mathcal{E})$, die $\mathcal{L}^{\otimes m}$ auf P' erzeugen. Sei $A = \Gamma(P, \text{Sym } \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{P'})$ die Polynomalgebra in $d + 1$ Unbestimmten und B die

Polynomialalgebra in $n + 1$ Unbestimmten über k . Es reicht zu zeigen, dass die kanonische graduierte Abbildung $B \rightarrow A$ endlich ist, also der äquivariante Morphismus $\text{Spec}(A) \rightarrow \text{Spec}(B)$ diskrete Fasern hat. Wäre A/B_+A nicht endlich, so kann $\text{Proj}(A) \rightarrow \text{Proj}(B)$ nicht überall definiert sein. Wäre eine andere Faser nicht endlich, so kann $\text{Proj}(A) \rightarrow \text{Proj}(B)$ nicht endlich sein. QED.

(1.3.5) Bemerkung. Es gibt Bündel ohne Basispunkte, aber mit schwachen Basispunkten. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Grundkörper von Charakteristik $p > 0$, und X eine glatte eigentliche Kurve vom Geschlecht $g > p + 1$ so, dass die p -lineare Abbildung auf $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ zum absoluten Frobenius-Morphismus Fr_X verschwindet, z. B. die ebene Kurve $x^2y + y^2z + z^2x$ über einem Körper der Charakteristik $p = 3$ [9, Ex. 2.14, p. 385]. Sei $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt, D der entsprechende effektive Divisor, und \mathcal{N} der zugehörige invertierbare Modul. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_D) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{N}^{-1}) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 0 \\ H^0(\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_{pD}) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{N}^{-p}) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X), \end{array}$$

dessen vertikale Pfeile die Frobenii sind. Aus Dimensionsgründen ist die p -lineare Abbildung $\text{Fr}_X : H^1(X, \mathcal{N}^{-1}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{N}^{-p})$ nicht injektiv, und es gibt eine Erweiterung

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0,$$

deren Urbild $\text{Fr}_X^*(\mathcal{E})$ spaltet. Betrachten wir die Regelfläche $P = P(\mathcal{E})$; die Surjektion $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N}$ definiert einen Schnitt $A \subset P$ mit $A^2 = 1$, der den tautologischen Modul $\mathcal{L} = \mathcal{O}_P(1)$ repräsentiert; folglich ist \mathcal{L} kontraktiv und liefert eine Kontraktion $g : P \rightarrow Y$. Die induzierte Regelfläche $P' = P(\mathcal{E}^{(p)})$ besitzt einen Schnitt $R' \subset P'$ mit $R'^2 < 0$, der disjunkt zum Urbild von A ist; folglich ist sein Bild $R \subset P$ ein Quasi-Schnitt vom Grad p und $g(R)$ ein Punkt. Somit ist $g : P \rightarrow Y$ faserweise keine abgeschlossene Einbettung und jedes $x \in X$ ein schwacher Basispunkt.

(1.3.6) Im Folgenden sei X ein eigentliches Schema über einem noetherschen Ring A . Ist \mathcal{E} kontraktiv, so liefert das homogene Spektrum von $S =$

$\Gamma(X, \text{Sym } \mathcal{E})$ einen projektiven Stein-Faktor $g : P \rightarrow Y$, und wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g} & Y \\ f \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & \text{Spec}(A). \end{array}$$

Es gibt eine natürliche Zahl $n > 0$ und einen ample invertierbaren \mathcal{O}_Y -Modul \mathcal{L} mit $\mathcal{L} = g^*(\mathcal{N})$. Die Fasern von g sind zusammenhängend und enthalten keine Kurven aus den Fasern von f .

Wir erhalten eine kohomologische Charakterisierung von kontraktiven Vektorbündel:

(1.3.7) Theorem. *Sei X ein eigentliches Schema über einem noetherschen Ring A und $S = \Gamma(X, \text{Sym } \mathcal{E})$. Dann sind äquivalent:*

- a) *Das Vektorbündel \mathcal{E} ist kontraktiv.*
- b) *Für jeden kohärenten \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{M} und jede natürliche Zahl p ist die Gruppe $H^p(X, \mathcal{M} \otimes \text{Sym } \mathcal{E})$ ein S -Modul von endlichem Typ.*
- c) *Es gibt eine A -Algebra R vom endlichen Typ und eine Homomorphismus $R \rightarrow S$ so, dass $H^p(X, \mathcal{M} \otimes \text{Sym } \mathcal{E})$ für jeden kohärenten \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{M} und jede natürliche Zahl p ein R -Modul vom endlichen Typ ist.*
- d) *Für jedes kohärente Ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ ist $H^1(X, \mathcal{I} \otimes \text{Sym } \mathcal{E})$ ein noetherscher S -Modul.*

Wir halten zunächst fest, dass für einen kohärenten \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{M} die Gruppen

$$(1.3.7.2) \quad H^p(X, \mathcal{M} \otimes \text{Sym } \mathcal{E}) \quad \text{und} \quad H^p(P, f^*(\mathcal{M}) \otimes \text{Sym } \mathcal{L})$$

TN-isomorph sind [EGA II, 2.7.2]; mit anderen Worten, es gibt eine natürliche Zahl n_0 so, dass

$$H^p(X, \mathcal{M} \otimes \text{Sym}^n \mathcal{E}) = H^p(P, f^*(\mathcal{M}) \otimes \text{Sym}^n \mathcal{L})$$

für alle $n > n_0$ gilt. Dies ergibt sich aus der Existenz einer natürlichen Zahl n_0 so, dass für alle $n > n_0$ die Bildgarbe $R^q f_*(f^*(\mathcal{M}) \otimes \text{Sym}^n \mathcal{L})$ für $q > 0$ verschwindet und die kanonische Abbildung

$$\mathcal{M} \otimes \text{Sym}^n(\mathcal{E}) \longrightarrow f_*(f^*(\mathcal{M}) \otimes \text{Sym}^n \mathcal{L})$$

bijektiv ist. Somit ist der eine Modul in (1.3.7.2) von endlichem Typ genau dann, wenn der andere es auch ist.

Kommen wir nun zum Beweis. Nach (1.1.8) impliziert a) die übrigen Bedingungen. Gelten b) oder c), so folgt a) aus (1.3.4). Angenommen, es gilt d). Ist $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt mit Ideal $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$, muss die mittlere Gruppe in

$$H^0(X, \text{Sym} \mathcal{E}) \longrightarrow H^0(X, \text{Sym} \mathcal{E}(x)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{I} \otimes \text{Sym} \mathcal{E})$$

ein S -Modul von endlichem Typ sein, und \mathcal{E} ist kontraktiv. QED.

Wir verallgemeinern schließlich unser Kriterium über Ampelheit auf dem Basisort:

(1.3.8) Theorem. *Sei X ein eigentliches Schema über einem noetherschen Ring A , und $X' \subset X$ eine abgeschlossenes Unterschema, welches alle strikten Basispunkte von $\text{Sym}(\mathcal{E})$ enthält. Wenn die Einschränkung $\mathcal{E} | X'$ ampel ist, dann ist \mathcal{E} kontraktiv.*

Das Urbild $P' = f^{-1}(X')$ enthält den Basisort von $\text{Sym}(\mathcal{L})$, und die Einschränkung $\mathcal{L}' = \mathcal{L} | X'$ ist ampel; nach (1.2.3) muss \mathcal{L} , also auch \mathcal{E} kontraktiv sein. QED.

1.4. Existenz von Divisoren

In diesem Abschnitt beantworten wir die Frage, unter welchen Umständen sich ein invertierbarer Modul auf einem noetherschen Schema durch einen Divisor repräsentieren lässt. Es gelte folgende Notation: Sei X ein noethersches Schema, $T \subset X$ eine endliche Teilmenge, die $\text{Ass}(\mathcal{O}_X)$ enthält, und \mathcal{L} ein invertierbarer \mathcal{O}_X -Modul. Wir stellen folgende Frage: Gibt es einen Divisor $D \in \text{Div}(X)$, dessen Träger $\text{Supp}(D) \subset X$ disjunkt zu T und dessen invertierbarer Modul $\mathcal{O}_X(D)$ isomorph zu \mathcal{L} ist?

Unser Hauptresultat besagt, dass so ein Divisor genau dann existiert, wenn die Einschränkung von \mathcal{L} auf T trivial ist; hierbei fassen wir die endliche

Menge T als geringsten Raum auf, indem wir sie mit der durch die Inklusion $i : T \rightarrow X$ induzierten Topologie und der Garbe $\mathcal{O}_T = i^{-1}(\mathcal{O}_X)$ ausstatten.

Im Spezialfall $T = \text{Ass}(\mathcal{O}_X)$ erhalten wir ein Kriterium, wann sich ein invertierbarer Modul durch einen Divisor repräsentieren lässt. Weiterhin geben wir zwei Gegenbeispiele und korrigieren die fehlerhafte Konstruktion [8] eines invertierbaren Moduls ohne Divisor.

(1.4.1) Sei $\mathcal{S}_T \subset \mathcal{O}_X$ die Untergarbe von Menge, die lokal aus den Schnitten $s \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ besteht, deren Halme $s_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ für alle $x \in T \cap U$ Einheiten sind. Ist U eine affine offene Teilmenge mit Ring A , so besteht $\Gamma(U, \mathcal{S}_T) \subset A$ aus allen Elemente $a \in A$, die in keinem Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ zu den Punkten $x \in T \cap U$ enthalten sind.

Sei $\mathcal{M}_{X,T}$ die \mathcal{O}_X -Algebra, die sich durch Lokalisierung $\mathcal{S}_T^{-1}\mathcal{O}_X$ in der Kategorie der Ringe ergibt, mit anderen Worten, die zu der Prägarbe

$$U \longrightarrow \Gamma(U, \mathcal{O}_X)[\Gamma(U, \mathcal{S}_T)^{-1}]$$

assoziierte Garbe. Wir bezeichnen ihre globalen Schnitte $M_T(X)$ als *T-triviale meromorphe Schnitte* und $\mathcal{M}_{X,T}$ als die Garbe der *T-trivialen meromorphen Schnitte*. Sei eine Garbe von additiv notierten abelschen Gruppen $\text{Div}_{X,T}$ durch die exakte Sequenz

$$1 \longrightarrow \mathcal{O}_X^\times \longrightarrow \mathcal{M}_{X,T}^\times \longrightarrow \text{Div}_{X,T} \longrightarrow 0$$

definiert. Wir bezeichnen ihre globalen Schnitte $\text{Div}_T(X)$ als *T-triviale Divisoren* und $\text{Div}_{X,T}$ als die Garbe der *T-trivialen Divisoren*. Die obige exakte Sequenz liefert eine lange exakte Kohomologie-Sequenz, von der wir das Anfangsstück

$$\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times \longrightarrow M_T(X)^\times \longrightarrow \text{Div}_T(X) \longrightarrow \text{Pic}(X) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{M}_{X,T}^\times)$$

untersuchen werden. Wir sehen, dass sich ein invertierbarer Modul \mathcal{L} genau dann durch einen Divisor mit Träger disjunkt zu T repräsentieren lässt, wenn seine Klasse in $H^1(X, \mathcal{M}_{X,T}^\times)$ verschwindet. Wir müssen daher die Garbe der *T-trivialen invertierbaren meromorphen Schnitte* berechnen:

(1.4.2) Proposition. *Die Garben $\mathcal{M}_{X,T}$ und $i_*(\mathcal{O}_T)$ sind isomorph.*

Wir zeigen, dass die Garben zur selben Prägarbe assoziiert sind. Sei $U \subset X$ eine affine offene Teilmenge mit Ring A und $S \subset A$ das Komplement der

Primideale $\mathfrak{p} \subset A$ zu den Punkten $T \cap U$. Betrachten wir zunächst die Garbe $\mathcal{M}_{X,T}$. Gemäß Definition liegt eine injektive Abbildung $S^{-1}A \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{M}_{X,T})$ vor; wir zeigen nun, dass sie auch surjektiv ist. Sei m ein lokaler Schnitt von $\mathcal{M}_{X,T}$; wir können ihn durch eine endliche affine offene Überdeckung $U_i \subset U$ und Elemente $s_i \in S_i^{-1}A_i$ repräsentieren; hierbei sind A_i die Ringe zu U_i und $S_i \subset A_i$ die Komplemente der Primideale zu $T \cap U_i$. Die Elemente s_i müssen in den Ringen $S_{ij}^{-1}A_{ij}$ kompatibel sein, wobei A_{ij} die Ringe zu $U_i \cap U_j$ und $S_{ij} \subset A_{ij}$ die Komplemente der Primideale zu $T \cap U_i \cap U_j$ sind. Wir wenden nun *fpqc*-Abstieg an; sei

$$B = S^{-1}A, \quad C_i = S_i^{-1}A_i, \quad \text{und} \quad D_{ij} = S_{ij}^{-1}A_{ij}.$$

Dann ist $V = \text{Spec}(B)$ das semi-lokale Schema aller Punkte $x \in U$, die Generisierungen von $U \cap T$ sind, und $W_i = \text{Spec}(C_i)$ das semi-lokale Schema aller Punkte, die Generisierungen von $U_i \cap T$ sind. Somit ist $\coprod W_i \rightarrow V$ flach und surjektiv. Wegen $\text{Ass}(\mathcal{O}_X) \subset T$ sind die Abbildungen $C_i \otimes_B C_j \rightarrow D_{ij}$ injektiv. Vermöge *fpqc*-Abstieg ist die Sequenz $B \rightarrow \prod C_i \rightrightarrows \prod D_{ij}$ exakt, also findet sich ein $s \in S^{-1}A$, welches unseren meromorphen Schnitt m induziert.

Betrachten wir nun die Garbe $i_*(\mathcal{O}_T) = i_*i^*(\mathcal{O}_X)$. Wegen $T \cap U \subset \text{Spec}(S^{-1}A)$ erhalten wir eine injektive Abbildung $S^{-1}A \rightarrow \Gamma(U, i_*(\mathcal{O}_T))$, und wir müssen zeigen, dass sie auch surjektiv ist. Sei m ein lokaler Schnitt von $i_*(\mathcal{O}_T)$. Dann findet sich eine endliche affine offene Überdeckung $U_i \subset X$ und Elemente

$$s_i \in \varinjlim \Gamma(V_{i,\alpha}, \mathcal{O}_X),$$

die m repräsentieren; hierbei verläuft der Limes über alle Teilmengen der Form $V_{i,\alpha} = D(a_{i,\alpha})$ mit $a_{i,\alpha} \in S_i$, und ergibt somit den Ring $S_i^{-1}A_i$. Wenden wir wie oben *fpqc*-Abstieg an, findet sich ein $s \in S^{-1}A$, das unseren lokalen Schnitt m induziert. QED.

Hieraus lässt sich leicht unser Hauptresultat ableiten:

(1.4.3) Theorem. *Sei X ein noethersches Schema, $T \subset X$ eine endliche Teilmenge mit $\text{Ass}(\mathcal{O}_X) \subset T$, und \mathcal{L} ein invertierbarer \mathcal{O}_X -Modul. Dieser Modul lässt sich durch einen Divisor $D \in \text{Div}(X)$ mit Träger disjunkt zu T repräsentieren genau dann, wenn seine Einschränkung $i^*(\mathcal{L})$ auf den geringsten Raum T trivial ist.*

Die exakten Sequenzen

$$\mathrm{Div}_T(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow H^1(X, i_*(\mathcal{O}_T)).$$

und

$$0 \longrightarrow H^1(X, i_*(\mathcal{O}_T^\times)) \longrightarrow H^1(T, \mathcal{O}_T^\times)$$

liefern eine exakte Sequenz

$$\mathrm{Div}_T(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow \mathrm{Pic}(T),$$

aus der sich unsere Behauptung ergibt. QED.

(1.4.4) Korollar. *Voraussetzungen wie in (1.4.3). Wenn T in einer affinen offenen Teilmenge $U \subset X$ enthalten ist, dann lässt sich jeder invertierbare Modul \mathcal{L} durch einen Divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ mit Träger disjunkt zu T repräsentieren.*

Wir müssen zeigen, dass die Einschränkung $i^*(\mathcal{L})$ trivial ist. Sei A der Ring zu U und $A \subset A'$ der semi-lokale Oberring, dessen maximale Ideale den minimalen Punkte von T entsprechen. Dann ist $X' = \mathrm{Spec}(A')$ die Teilmenge aller Punkte, die Generisierungen von T sind, und wir erhalten eine Faktorisierung $T \subset X' \subset X$. Da die Picard-Gruppe eines semi-lokalen Ringes verschwindet, muss die Einschränkung $i^*(\mathcal{L})$ trivial sein. QED.

(1.4.5) Korollar. *Voraussetzungen wie in (1.4.3). Wenn es einen ample invertierbaren \mathcal{O}_X -Modul gibt, dann lässt sich jeder invertierbare Modul \mathcal{L} durch einen Divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$ mit Träger disjunkt zu T repräsentieren.*

Nach [EGA II, 4.5.4] ist jede endliche Teilmenge von X in einer affinen, offenen Teilmenge enthalten. QED.

(1.4.6) Wir konstruieren nun zwei Beispiele, für welche die kanonische Abbildung $\mathrm{Div}(T) \rightarrow \mathrm{Pic}(X)$ nicht surjektiv ist. Unser erstes Beispiel ist nicht-separiert: Sei A ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper K ; verheften wir zwei Kopien U_1, U_2 seines Spektrums entlang $\mathrm{Spec}(K)$, so erhalten wir eine nicht-separierte, reguläre, noethersche Kurve $Y = U_1 \cup U_2$ mit affiner Hülle $\mathrm{Spec}(A)$. In der exakten Sequenz

$$\Gamma(Y, \mathcal{O}_X)^\times \longrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{M}_X)^\times \longrightarrow \mathrm{Div}(Y) \longrightarrow \mathrm{Pic}(Y) \longrightarrow 0$$

gilt $\text{Div}(Y) = \mathbb{Z}^2$, also $\text{Pic}(Y) = \mathbb{Z}$. Sei X eine infinitesimale Erweiterung von Y mit $\text{Ass}(\mathcal{O}_X) = X$. Dann ist $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(Y)$ surjektiv, aber Div_X verschwindet. Somit wird nur der triviale invertierbare \mathcal{O}_X -Modul durch einen Divisor repräsentiert.

(1.4.7) Unser zweites Gegenbeispiel ist interessanter und korrigiert eine fehlerhafte Konstruktion von Hartshorne [8, 1.3, p. 9], die Kleiman zugeschrieben wird. Sei k ein Grundkörper und Y ein reguläres, eigentliches, irreduzibles Schema, auf dem zwei integrale Kurven C_1, C_2 existieren, deren Summe $C = C_1 \cup C_2$ numerisch trivial ist. So ein Schema wurde von Hironaka durch lokale Aufblasungen konstruiert und in [18, p. 75] ausführlich beschrieben. Für jeden Divisor $D \in \text{Div}(Y)$ gilt

$$C_1 \cdot D > 0 \iff C_2 \cdot D < 0;$$

folglich ist ein effektiver Divisor $D \subset Y$ entweder disjunkt zu C oder enthält eine irreduzible Komponente von C . Sei $x_1 \in C_1$ ein abgeschlossener Punkt und X die infinitesimale Erweiterung von Y durch $\mathcal{I} = \kappa(x_1)$. Da $\text{Pic}(X) \rightarrow \text{Pic}(Y)$ bijektiv ist, gibt es einen invertierbaren \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{L} mit $C_2 \cdot c_1(\mathcal{L}) > 0$. Angenommen, er wird durch einen *effektiven* Divisor $D \subset X$ repräsentiert. Dann gilt $C_1 \subset D$, also $x_1 \in D$, Widerspruch. Andererseits ist $\text{Ass}(\mathcal{O}_X)$ in einer affinen offenen Teilmenge enthalten, und es muss einen nicht-effektiven Divisor D mit $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ geben.

Um zum gewünschten Gegenbeispiel zu kommen, müssen wir mindestens *drei* assoziierte Punkte erzwingen. Sei $x_2 \in C_2$ ein abgeschlossener Punkt und X die infinitesimale Erweiterung durch $\mathcal{I} = \kappa(x_1) \oplus \kappa(x_2)$. Dann gibt es einen invertierbaren \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{L} mit $C_2 \cdot c_1(\mathcal{L}) > 0$. Angenommen, es findet sich ein Divisor $D \in \text{Div}(X)$ mit $C_2 \cdot D > 0$. Da jede Primkomponente von $\text{cyc}(D)$ disjunkt zu $\text{Ass}(\mathcal{O}_X)$ ist, können wir annehmen, dass $\text{Supp}(D)$ irreduzibel ist. Ist D effektiv, so folgt $C_2 \subset D$, Widerspruch; ist $-D$ effektiv, so gilt $C_1 \subset D$, Widerspruch. Also wird nicht jeder invertierbare \mathcal{O}_X -Modul durch einen Divisor repräsentiert.

2. Birationale Kontraktionen von normalen Flächen

In diesem Kapitel verwenden wir kontraktive Garben, um ein Problem über normale Flächen zu lösen. Unter einer Fläche wollen wir hierbei ein 2-dimensionales, eigentliches, algebraisches Schema verstehen. Das Problem lautet: *Gegeben eine normale Fläche X und eine Kurve $R \subset X$, gibt es eine birationale Kontraktion $f : X \rightarrow Y$ dieser Kurve?*

Unsere Frage hat eine lange Geschichte. Castelnuovo wies im letzten Jahrhundert nach, dass man eine projektive Gerade mit Selbstschnitt -1 auf einer glatten Fläche kontrahieren kann, wobei die so entstandene Fläche glatt bleibt. Artin [1] zeigte, dass die Schnittform auf R negativ definit sein muss, und wies nach [2], dass diese Bedingung auch hinreichend ist, wenn man die Kategorie der Schemata verlässt und mit algebraischen Räumen arbeitet. Im Unterschied zu diesem Ansatz befassen wir uns ausschließlich mit der Frage, ob die Kontraktion als *Schema* realisiert werden kann.

Unser Hauptresultat ist eine Charakterisierung von kontrahierbaren Kurven: Grob gesprochen existiert eine Kontraktion genau dann, wenn es einen Zyklus $D \in Z^1(X)$ gibt, der eine Stützform des pseudo-effektiven Kegels bezüglich der Kurve $R \subset X$ ist, und in einer Umgebung der Kurve ein Divisor ist, und dessen reflexiver Modul $\mathcal{O}_X(D)$ auf den infinitesimalen Umgebungen der Kurve sukzessive zu trivialen Moduln „verbessert“ werden kann. Wie wir sehen werden, enthält dieses Problem sowohl lokale Aspekte, also solche, die nur von der Kompletzierung \mathfrak{X} von $R \subset X$ abhängen, als auch globale Aspekte, welche die Struktur der Fläche betreffen, etwa den kanonischen Modul ω_X .

Unser Resultat hat eine Anwendung auf die potentielle Enriques-Klassifikation von normalen Flächen: Eine Fläche, deren kanonische Klasse nicht im pseudo-effektiven Kegel enthalten ist, erlaubt wahrscheinlich eine birationale Kontraktion. Dies ist eine wertvolle Information, denn eine Kontraktion ist im gewissen Sinne eine Vereinfachung der Fläche.

Dieses Kapitel ist folgendermaßen gegliedert: Der erste Abschnitt ist vorbereitender Natur und enthält die notwendigen Grundlagen über rationale Schnittzahlen und den pseudo-effektiven Kegel für normale Flächen. Im zweiten Abschnitt beweisen wir unser Hauptresultat, die Charakterisierung von kontrahierbaren Kurven. Die zwei folgenden Abschnitte gehen der Frage nach, wann die Bedingungen unseres Kriteriums erfüllt sind: Im Abschnitt

drei geht es um die Verbesserung von Zyklen, im Abschnitt vier um die Verbesserung von Divisoren. Der letzte Abschnitt enthält Anwendungen unseres Resultats: Wir zeigen, wie man den dualisierenden Modul ω_X oder die Charakteristik des Grundkörpers p benutzen kann, um Kurven zu kontrahieren. Weiterhin geben wir ein Beispiel für nicht kontrahierbare Kurven.

2.1. Der pseudo-effektive Kegel

In diesem Abschnitt geht es um rationale Schnittzahlen und den pseudo-effektiven Kegel auf normalen Flächen Y . Rationale Schnittzahlen sind von Mumford [13, p. 17] für komplexe Flächen eingeführt worden. Mit ihrer Hilfe kann man die 1-Zyklen in *numerische* Klassen einteilen. Die Gruppe der numerischen Klassen $N(Y)$ enthält zwei wichtige abgeschlossene Kegel, den pseudo-effektiven und den pseudo-amplen Kegel, die zueinander polar sind. Unser Hauptresultat ist die Charakterisierung der extremalen Kegel des pseudo-effektiven Kegels, auf denen die Schnittform negativ ist: Sie entsprechen den Kurven $R \subset Y$, auf denen die Schnittform negativ definit ist. Dies ist ein nützliches Resultat, denn es besagt, dass man aus dem *numerisch* definierten Kegel *geometrische* Information gewinnen kann.

(2.1.1) Sei Y eine normale Fläche. Es stellen sich folgende beiden Probleme: Kann man die kanonische Schnittpaarung $\text{Div}(Y) \times Z^1(Y) \rightarrow \mathbb{Z}$ zu einer Schnittform auf $Z^1(Y)$ mit rationalen Werten fortsetzen? Gegeben einen birationalen Morphismus $f : X \rightarrow Y$, kann man den kanonischen Homomorphismus $\text{Div}(Y) \rightarrow \text{Div}(X)$ zu einem Homomorphismus $Z^1(Y) \rightarrow Z^1(X, \mathbb{Q})$ fortsetzen?

Beide Probleme wurden von Mumford folgendermaßen gelöst. Sei $f : W \rightarrow X$ eine Auflösung der Singularitäten, $R \subset W$ der exzeptionelle Divisor, und $Z^1(W/X) \subset Z^1(W)$ die von seinen integren Komponenten erzeugte Untergruppe. Nach [SGA 7, X 1.9] ist die Schnittform auf $Z^1(W/X)$ negativ definit, und wir können die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow Z^1(W/X) \longrightarrow Z^1(W) \longrightarrow Z^1(X) \longrightarrow 0$$

als Form über den rationalen Zahlen spalten. Fassen wir $Z^1(X)$ und $Z^1(Y)$ als Untergruppe von $Z^1(W, \mathbb{Q})$ auf, erhalten wir die gesuchte Schnittpaarung auf $Z^1(Y)$ und den gewünschten Homomorphismus $f^* : Z^1(Y) \rightarrow Z^1(X, \mathbb{Q})$. Man kann zeigen, dass diese Konstruktion nicht von der gewählten Auflösung

der Singularitäten abhängt und sieht leicht, dass die Bildung von f^* assoziativ ist und die Projektionsformel erfüllt.

(2.1.2) Sei $f : X \rightarrow Y$ ein birationaler Morphismus und Φ die Schnittmatrix auf $Z^1(X/Y)$ bezüglich der kanonischen Basis R_i . Diese Matrix erfüllt $R_i^2 < 0$ für alle i und $R_i \cdot R_j \geq 0$ für alle $i \neq j$; seien a_{ij} die Einträge der inversen Matrix Φ^{-1} . Angenommen, es gibt einen Eintrag $a_{kl} > 0$. Seien $a_{ij}^+ = \sup(a_{ij}, 0)$ und $a_{ij}^- = \sup(-a_{ij}, 0)$ der positive und negative Anteil der Einträge. Dann gilt

$$0 > \left(\sum_i a_{ki}^+ R_i \right)^2 = \left(\sum_i a_{ki}^+ R_i \right) \cdot \left(\sum_j a_{kj}^+ R_j \right),$$

also findet sich ein Index j mit $0 > \left(\sum_i a_{ki}^+ R_i \right) \cdot R_j$. Somit gilt

$$0 \leq \delta_{kj} = \sum_i a_{ki} R_i \cdot R_j = \left(\sum_i a_{ki}^+ R_i \right) \cdot R_j - \sum_{i \neq j} a_{ki}^- (R_i \cdot R_j) < 0,$$

Widerspruch! Also sind alle Einträge von Φ^{-1} *negativ*. Angenommen, die Kurve R ist zusammenhängend, und es gibt einen Eintrag $a_{kl} = 0$. Wie oben erhalten wir einen Index j mit $0 > \left(\sum_i a_{ki}^+ R_i \right) \cdot R_j$; ist $l \neq j$ ein Index mit $R_j \cap R_l$ nicht-leer, so gilt

$$0 \leq \delta_{kj} = \sum_i a_{ki} R_i \cdot R_j = \left(\sum_i a_{ki}^+ R_i \right) \cdot R_j - \sum_{i \neq j, l} a_{ki}^- (R_i \cdot R_j) - a_{li} (R_l \cdot R_i) < 0$$

Widerspruch! Also sind alle Einträge von Φ^{-1} *strikt negativ*. Dies hat folgende Konsequenz: Ist $B \in Z^1(Y)$ ein Zyklus mit positiven Koeffizienten, so gilt das gleiche für sein Urbild $f^*(B) \in Z^1(X)$; mit anderen Worten, f^* ist ein Homomorphismus von *geordneten* Gruppen.

(2.1.3) Wir kommen nun zu den *linearen* und *numerischen* Klassen, in welche sich 1-Zyklen einteilen lassen. Zwei 1-Zyklen A, B werden als linear äquivalent bezeichnet, wenn die reflexiven Moduln $\mathcal{O}_Y(A)$ und $\mathcal{O}_Y(B)$ isomorph sind, und wir schreiben $\text{APic}(Y)$ für die Gruppe der linearen Klassen. Lineare Äquivalenz ist eine sehr feine Relation und $\text{APic}(Y)$ für viele Anwendungen zu kompliziert. Wir bezeichnen zwei Zyklen A, B als numerisch äquivalent, wenn $A \cdot C = B \cdot C$ für alle 1-Zyklen C gilt, und schreiben $N(Y)$ für die Gruppe der numerischen Klassen. Mit anderen Worten, die induzierte Paarung

$$N(Y) \times N(Y) \longrightarrow \mathbb{Q}$$

ist die nicht-entartete Form zur Schnittpaarung auf $Z^1(Y)$. Die Relation der numerischen Äquivalenz ist sehr grob, da die Gruppe $N(Y)$ endlich erzeugt und frei ist; wir bezeichnen den Rang $\rho(Y)$ dieser Gruppe als die *Basiszahl* der Fläche.

Einen Zyklus mit positiven Koeffizienten bezeichnet man als *effektiv*. Einen Zyklus $A \in Z^1(Y)$, der die Bedingung des Nakai-Kriteriums erfüllt, also $A^2 > 0$ und $A \cdot B > 0$ für jede Kurve $B \subset Y$, bezeichne wir als *ampel*. Man beachte allerdings, dass ein ample Zyklus keinen ample Divisor liefern muss. Die effektiven bez. amplen Zyklen erzeugen Kegel $\text{NE}(Y) \subset N(Y, \mathbb{R})$ bez. $\text{NA}(Y) \subset N(Y, \mathbb{R})$. Ihre Abschlüsse $\overline{\text{NE}}(Y)$ und $\overline{\text{NA}}(Y)$ werden als *pseudo-effektiver* und *pseudo-ample* Kegel bezeichnet. Das folgende Resultat zeigt, wie man ample Zyklen konstruieren kann:

(2.1.4) Proposition. *Sei Y eine normale, irreduzible Fläche und $U \subset Y$ eine nicht-leere, affine offene Teilmenge. Dann ist das Komplement $Y \setminus U$ zusammenhängend und der Träger eines ample effektiven 1-Zyklus.*

Das Komplement $Y' = Y \setminus U$ ist zusammenhängend [8, Cor. 6.2, p. 79] und rein 1-dimensional. Wegen der Affinität kann keine abgeschlossene Kurve ganz in U enthalten sein. Folglich ist $C \cap Y'$ von Dimension 0 für jede Kurve C , die U berührt. Es reicht also, einen Zyklus A zu konstruieren so, dass $A \cdot C > 0$ für jede irreduzible Komponente $C \subset Y'$ gilt. Der Beweis in [8, thm. 4.2, p. 69] lässt sich in unserer Situation anwenden, wenn wir den Grundkörper durch transzendente Elemente vergrößern, und liefert den gewünschten ample Zyklus mit Träger X' . QED.

Insbesondere gibt es einen ample effektiven Zyklus. Der pseudo-effektive und der pseudo-ample Kegel stehen in folgender Beziehungen zueinander:

(2.1.5) Proposition. *Es gilt $\text{NA}(Y) \subset \text{NE}(Y)$, und der pseudo-ample Kegel ist polar zum pseudo-effektiven Kegel.*

Sei A ein numerisch ample Zyklus. Nach (2.1.4) gibt es einen numerisch ample, effektiven Zyklus B , also gilt $A \cdot B > 0$. Wie in [SGA 6, XIII 7.1.2] zeigt man, dass ein Vielfaches nA effektiv ist. Also ist der ample Kegel im effektiven Kegel enthalten.

Sei A ein reelles Element mit $A \cdot C \geq 0$ für jede Kurve $C \subset Y$. Wir müssen zeigen, dass dieses Element pseudo-ample ist, also $A^2 \geq 0$ erfüllt. Sei $Q \subset N(Y, \mathbb{R})$ die offene Menge aller Klassen q mit $q^2 > 0$. Diese Menge

enthält genau zwei zusammenhängende Komponenten, und die Linearform B ist wegen dem Hodge-Index-Satz auf genau einer Komponente Q_+ strikt positiv. Aus [SGA 6, XIII 7.1.2] ergibt sich, dass Q_+ im pseudo-effektiven Kegel enthalten ist. Also ist A polar zu $\overline{Q_+}$, somit gilt $A^2 \geq 0$. QED.

Wir sagen, eine Kurve $R \subset Y$ sei *negativ definit*, wenn die Schnittform auf ihr negativ definit ist. Der Kegel einer Kurve sei der Kegel $P \subset N(Y, \mathbb{R})$, der von ihren irreduziblen Komponenten erzeugt wird. Wir sagen, dass ein Kegel negativ definit ist, wenn die Schnittform auf dem von ihm erzeugten Untermodul negativ definit ist.

Der pseudo-effektive Kegel erfüllt folgende nützliche Endlichkeitsbedingung:

(2.1.6) Proposition. *Sei $R \subset Y$ eine Kurve, $P \subset N(Y, \mathbb{R})$ der entsprechende Kegel, und $Q \subset \overline{NE}(Y)$ der von den übrigen irreduziblen Kurven $C \subset Y$ erzeugte abgeschlossene Kegel. Wenn R negativ definit ist, dann gilt $P \cap Q = 0$.*

Angenommen, es gibt eine Klasse $A \in P \cap Q$, die nicht verschwindet. Dann gilt $A^2 < 0$, und es gibt eine Folge von reellen, effektiven 1-Zyklen A_n , die numerisch gegen A konvergieren und deren irreduzible Komponenten nicht in R auftauchen. Es folgt

$$0 > A^2 = \lim(A_n \cdot A) \geq 0,$$

Widerspruch! QED.

Zu negativ definiten Kurven lassen sich immer Stützformen finden:

(2.1.7) Proposition. *Sei $R \subset Y$ eine negativ definite Kurve. Dann gibt es einen effektiven 1-Zyklus A mit $A \cdot C = 0$ für jede Kurve $C \subset R$ und $A \cdot C > 0$ für jede Kurve $C \not\subset R$.*

Sei B ein numerisch ample Zyklus und E ein Zyklus, der von R getragen wird und $E \cdot C = B \cdot C$ für jede irreduzible Komponente $C \subset R$ erfüllt; nach (2.1.2) ist $-E$ effektiv, und $A = B - E$ löst unser Problem. QED.

Wir kommen nun zu unserem Hauptresultat, nämlich der Charakterisierung der extremalen Kegel des pseudo-effektiven Kegels. Man bezeichnet einen abgeschlossenen Unterkegel $P \subset \overline{NE}(Y)$ als *extremal*, wenn aus $A + B \in P$ die Relationen $A, B \in P$ folgen.

(2.1.8) Theorem. *Ordnet man einer Kurve $R \subset Y$ den von ihr erzeugten Kegel $P \subset N(Y, \mathbb{R})$ zu, so ergibt sich eine Bijektion zwischen der Menge der negativ definiten reduzierten Kurven R und der Menge der negativ definiten extremalen Kegel von $\overline{NE}(Y)$, und diese Zuordnung respektiert die Inklusions-Relationen.*

Nach (2.1.6) ist diese Zuordnung wohldefiniert. Wir müssen zeigen, dass jeder negativ definite extremale Kegel von einer eindeutigen negativ definiten reduzierten Kurve induziert wird. Betrachten wir zunächst den Spezialfall, dass P ein Strahl ist. Sei R ein Erzeuger und R_n eine Folge von reellen effektiven Zyklen, deren numerische Klassen gegen R konvergieren. Gemäß (2.1.5) gibt es eine integrale Kurve $A \subset Y$ mit $R \cdot A < 0$. Gehen wir zu einer Teilfolge über, können wir $R_n \cdot A < 0$ für alle Indices n annehmen. Zerlegen wir

$$R_n = \lambda_{n,0}R_{n,0} + \lambda_{n,1}R_{n,1} + \dots$$

in endlich viele paarweise verschiedene Primzyklen mit $\lambda_{n,i} > 0$. Dann muss die Kurve A unter den $R_{n,i}$ auftauchen; durch Umordnung können wir $R_{n,0} = A$ annehmen. Sei $\lambda = \liminf(\lambda_{n,0})$; durch Übergang zu einer weiteren Teilfolge können wir annehmen, dass $\lambda_{n,0}$ gegen λ konvergiert. Sei $R'_n = \lambda_{n,0}R_{n,0}$; da R_n und R'_n konvergieren, muss auch die Differenz $R''_n = R_n - R'_n$ konvergieren. Angenommen, es gilt $\lambda = 0$, also $\lim(R'_n) = 0$. Dann konvergiert R''_n gegen R , somit

$$0 > R \cdot A = \lim(R''_n \cdot A) \geq 0,$$

Widerspruch! Also sind in der Zerlegung

$$R_n = (R_n - \lambda A) + \lambda A$$

beide Summanden effektiv; wegen der Extremalität folgt $A \in P$. Betrachten wir nun den allgemeinen Fall. Der Kegel P enthält keine Geraden, wird also von seinen extremalen Strahlen $P_i \subset P$ erzeugt; nach unserer Vorüberlegung wird jeder extremale Strahl von einer integralen Kurve $R_i \subset X$ erzeugt. Angenommen, es gibt eine Relation

$$R_i = \sum_{j \neq i} \lambda_j R_j;$$

da der pseudo-effektive Kegel keine Geraden enthält, müssen alle Koeffizienten λ_j positiv sein. Wegen

$$0 > R_i^2 = \sum_{j \neq i} \lambda_j R_j \cdot R_i \quad \text{und} \quad R_j \cdot R_i \geq 0$$

müssen alle Koeffizienten verschwinden, also sind die R_i linear unabhängig. Wegen der Endlichkeit der Basiszahl ist die Anzahl dieser Kurven endlich. Somit löst ihre Vereinigung $R = \cup R_i$ unser Problem. QED.

2.2. Charakterisierung von Kontraktionen

Dieser Abschnitt enthält unser zentrales Resultat, nämlich eine Charakterisierung von kontrahierbaren Kurven. Der Beweis benutzt kontraktive Garben und die Struktur des pseudo-effektiven Kegels. Wir bemerken zunächst, dass wir nur den Fall von *zusammenhängenden* Kurven beachten brauchen:

(2.2.1) Lemma. *Eine Kurve $R \subset X$ lässt sich kontrahieren genau dann, wenn sich jede ihrer zusammenhängenden Komponenten kontrahieren lässt.*

Seien $R_i \subset R$ die zusammenhängenden Komponenten. Die Bedingung ist notwendig: Sei $f : X \rightarrow Y$ die Kontraktion von R und $y_i = f(R_i)$. Dann finden sich offene Umgebungen $V_i \subset Y$ von y_i , die zu den übrigen Bildpunkten disjunkt ist. Sind $U_i \subset X$ deren Urbilder, so erhalten wir eine Kontraktion von R_j durch Verheftung von $X \setminus R_j$ und V_j entlang der offenen Teilmenge $U_j \setminus R_j \simeq V_j \setminus \{y_j\}$. Die Umkehrung lässt sich entsprechend beweisen. QED.

Wir formulieren daher unser Hauptresultat nur für zusammenhängende Kurven:

(2.2.2) Theorem. *Sei X eine normale Fläche, $R \subset X$ eine negativ definite, reduzierte, zusammenhängende Kurve, und $P \subset N(X, \mathbb{R})$ der von ihr erzeugte Kegel. Dann existiert eine Kontraktion $f : X \rightarrow Y$ von R genau dann, wenn es einen Zyklus $D \in Z^1(X)$ mit den folgenden drei Eigenschaften gibt:*

- (i) *Der Zyklus D liefert eine Stützform des pseudo-effektiven Kegels bezüglich des extremalen Kegels P .*
- (ii) *Es gibt eine offene Umgebung von R , auf der D ein Divisor ist.*
- (iii) *Für jede natürliche Zahl $m > 0$ gibt es einen numerisch trivialen Zyklus N , der in einer Umgebung der Kurve ein Divisor ist, und eine natürliche Zahl $n > 0$ so, dass der reflexive Modul des Zyklus $nD + N$ auf der m -ten infinitesimalen Umgebung von R trivial ist.*

Zeigen wir zunächst, dass die Bedingungen notwendig sind. Sei $f : X \rightarrow Y$ die Kontraktion und $y = f(R)$. Ist $V \subset Y$ eine affine offene Umgebung, so ist dessen Komplement $Y \setminus V$ der Träger eines numerisch amplen effektiven 1-Zyklus, und sein Urbild $D \subset X$ erfüllt trivialerweise unsere Bedingungen.

Das Problem ist zu zeigen, dass die Bedingungen hinreichen. Wir reduzieren die Behauptung zunächst auf den Fall, dass X regulär ist. Sei $g : X' \rightarrow X$ eine Auflösung aller Singularitäten, die in R enthalten sind. Nach [EGA II, 8.11.1] reicht es, das Urbild $R' = g^{-1}(R)$ zu kontrahieren. Offenbar erfüllen R' und $D' = f^*(D)$ unsere Bedingungen auf der Fläche X' , und wir können annehmen, dass unsere Kurve im regulären Ort liegt. Sei nun $g : X' \rightarrow X$ die Auflösung der Singularitäten ausserhalb von R . Wir fassen R auch als Kurve auf der Auflösung auf und bezeichnen mit $R' \subset X$ die g -exzeptionelle Kurve. Nach (2.2.1) reicht es, die Kurve $R \subset X$ zu kontrahieren. Sei $P \subset N(X', \mathbb{R})$ der Kegel zu R und $Q \subset N(X', \mathbb{R})$ der von den übrigen integren Kurven erzeugte abgeschlossene Kegel. Nach (2.1.6) gilt $P \cap Q = 0$. Sei A' ein von R' getragener, g -amplener Divisor. Ist $U \subset N(X', \mathbb{R})$ eine kompakte Nullumgebung, so ist A' als Linearform auf dem Kompaktum $U \cap Q$ beschränkt. Gehen wir zu geeigneten Vielfachen von D über, können wir annehmen, dass $g^*(D)$ ganzzahlig ist und $D' = g^*(D) + A'$ auf dem Kompaktum $U \cap Q$ strikt positiv ist. Folglich ist D' eine Stützform von P , und auch die übrigen beiden Bedingungen sind erfüllt. Wir können also zusätzlich annehmen, dass unsere Fläche regulär ist.

Angenommen, es gilt $D^2 = 0$. Da D pseudo-geräumig, also pseudo-effektiv ist, muss seine Klasse in P enthalten sein, also verschwinden, Widerspruch. Es gilt demnach $D^2 > 0$. Sei E ein Divisor mit Träger in R so, dass $-E$ auf R ampel ist; nach (2.1.2) handelt es sich um einen effektiven Divisor mit $\text{Supp}(E) = R$. Es gilt

$$(tD - E)^2 = t^2 D^2 - 2tD \cdot E + E^2 > 0,$$

falls t hinreichend groß ist, und wie oben sieht man, dass ebenso $(tD - E) \cdot A > 0$ für alle Kurven $A \subset Y$ und t hinreichend groß gilt. Ersetzen wir D durch ein geeignetes Vielfaches, können wir nach dem Nakai-Kriterium annehmen, dass $D - E$ ampel ist.

Sei $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ und $\mathcal{M} = \mathcal{O}_X(-E)$; nach Konstruktion ist \mathcal{L} pseudo-amplener und $\mathcal{L} \otimes \mathcal{M}$ ampel. Nach [6, thm. 5.1, p. 367] gibt es eine natürliche Zahl $t_0 > 0$ so, dass für alle $s \geq 0$ und $t \geq t_0$ und jeden numerisch trivialen

invertierbaren \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{N} die Kohomologie-Gruppe

$$H^1(X, \mathcal{L}^{\otimes s} \otimes (\mathcal{L} \otimes \mathcal{M})^{\otimes t} \otimes \mathcal{N})$$

verschwindet. Ersetzen wir \mathcal{L} und \mathcal{M} durch ihre t_0 -fachen, ergibt sich

$$H^1(X, \mathcal{L}^{\otimes s} \otimes \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}) = 0$$

für alle $s > 0$. Aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_E \longrightarrow 0$$

ergibt sich eine exakte Sequenz

$$H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes s} \otimes \mathcal{N}) \longrightarrow H^0(E, \mathcal{L}^{\otimes s} \otimes \mathcal{N} | E) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{L}^{\otimes s} \otimes \mathcal{M} \otimes \mathcal{N}),$$

deren rechter Term nach Konstruktion verschwindet. Sei m eine natürliche Zahl so, dass $E \subset X$ in der m -ten infinitesimalen Umgebung von R enthalten ist. Nach Voraussetzung gibt es eine natürliche Zahl $s > 0$ und einen numerisch trivialen invertierbaren \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{N} so, dass $\mathcal{L}^{\otimes s} \otimes \mathcal{N} | E$ trivial ist; ersetzen wir \mathcal{L} durch $\mathcal{L}^{\otimes s} \otimes \mathcal{N}$. Es gibt also einen globalen Schnitt σ von \mathcal{L} , der auf E an keiner Stelle verschwindet; sei $U \subset X$ die offene Teilmenge aller Punkte, an denen die kanonische Abbildung

$$\Gamma(X, \mathcal{L}) \otimes \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{L}$$

surjektiv ist. Wir haben gezeigt, dass $R \subset U$ gilt; das Komplement $X \setminus U$ ist höchstens 1-dimensional, und \mathcal{L} ist darauf ampel. Nach (1.2.1) ist ein Vielfaches von \mathcal{L} global erzeugt; somit liefert das homogene Spektrum von $\Gamma(X, \text{Sym } \mathcal{L})$ die gesuchte Kontraktion. QED.

2.3. Verbesserung von Zyklen

Die zweite Bedingung in unserem Hauptresultat (2.2.2) verlangt, dass der Zyklus D in einer Umgebung der zu kontrahierenden Kurve R ein Divisor ist. Man könnte versuchen, dies sicherzustellen, indem man D zunächst als Zyklus wählt und versucht, ihn in einer Umgebung von R zu einem Divisor zu „verbessern“.

In diesem Abschnitt untersuchen wir daher folgendes Problem: Gegeben einen 1-Zyklus A einer normalen Fläche X , gibt es eine natürliche Zahl $n > 0$

und einen numerisch trivialen 1-Zyklus B so, dass $nA + B$ an einer vorgegebenen Teilmenge $T \subset X$ ein Divisor ist? Um dieses Problem zu untersuchen, führen wir den Begriff der τ -Faktorialität ein. Eine nützliche Beobachtung wird sein, dass Flächen mit $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ a priori τ -faktoriell sind, und daher die oben angesprochene Bedingung unseres Hauptresultats erfüllen.

(2.3.1) Definition. Sei X eine normale Fläche und $T \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Wir sagen, dass X bezüglich T eine τ -faktorielle Fläche ist, wenn es zu jedem 1-Zyklus $A \in Z^1(X)$ eine natürliche Zahl $n > 0$ und einen numerisch trivialen 1-Zyklus $B \in Z^1(X)$ gibt so, dass $nA + B$ in einer offenen Umgebung von T ein Divisor ist.

Wird die Bedingung für $T = X$ erfüllt, so bezeichnen wir die Fläche als τ -faktoriell. Die Bedingung ist sowohl lokaler als auch globaler Natur; zum Beispiel sind Flächen, deren lokale Ringe \mathbb{Q} -faktoriell sind, a priori auch τ -faktoriell. Andererseits erzwingt τ -Faktorialität gewisse globale Konsequenzen. Zum Beispiel haben wir ein Projektivitäts-Kriterium:

(2.3.2) Proposition. Eine τ -faktorielle Fläche ist projektiv.

Nach (2.1.4) gibt es einen numerisch amplen Zyklus A . Wenden wir die τ -Faktorialität an, so können wir annehmen, dass A ein Divisor ist, und der entsprechende invertierbare Modul \mathcal{L} ist nach dem Nakai-Kriterium ampel. QED.

(2.3.3) Bemerkung. Für τ -faktorielle Flächen hat die kanonische Abbildung $\text{Pic}(X) \rightarrow N(X)$ einen endlichen Kokern. Wir haben in (5.3.5) eine Fläche mit einem Kokern von Rang 1 konstruiert.

Wie verhält sich τ -Faktorialität unter Kontraktion, etwa bei Auflösung der Singularitäten? Wir haben folgendes Resultat:

(2.3.4) Proposition. Sei X eine normale Fläche, $R \subset X$ eine reduzierte Kurve, deren Kontraktion $f : X \rightarrow Y$ existiert, \mathfrak{X} die Komplettierung an dieser Kurve, und $T \subset X$ eine Teilmenge, die R enthält. Wenn X bezüglich T eine τ -faktorielle Fläche ist und der Kokern von $\text{Pic}^0(X) \rightarrow \text{Pic}^0(\mathfrak{X})$ eine Torsionsgruppe ist, dann ist Y an $f(T)$ eine τ -faktorielle Fläche.

Sei $A \in Z^1(Y)$ ein 1-Zyklus; ersetzen wir ihn durch ein Vielfaches, so muss sein Urbild $f^*(A) \in Z^1(X, \mathbb{Q})$ über \mathbb{Z} definiert sein. Sei $n > 0$ eine natürliche Zahl und $B \in Z^1(X)$ ein numerisch trivialer 1-Zyklus so, dass $f^*(nA) + B$ auf einer Umgebung von R ein Divisor ist, und \mathcal{L} der entsprechende reflexive Modul. Ich kann also annehmen, dass die Kompletierung $\mathcal{L} \mid \mathfrak{X}$ trivial ist, und $f_*(\mathcal{L})$ muss in einer Umgebung von $f(R)$ invertierbar sein. Da dieser Modul auf dem Komplement von $f(R)$ durch den Zyklus $nA + f_*(B)$ repräsentiert wird, muss dieser an $f(T)$ ein Divisor sein. QED.

Wir benutzen nun ein Resultat, dass wir wegen seiner Allgemeinheit ans Ende dieses Abschnitts gerückt haben, um folgende Kriterien zu erhalten:

(2.3.5) Korollar. *Voraussetzungen wie in (2.3.4). Angenommen, eine der folgenden Bedingungen ist erfüllt:*

- (i) *Der Ecken-Homomorphismus $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow H^1(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}})$ ist surjektiv.*
- (ii) *Die Charakteristik des Grundkörpers ist $p > 0$ und der Kokern von $\text{Pic}_{X/k}^0 \rightarrow \text{Pic}_{\mathfrak{X}/k}^0$ ist ein unipotentes Gruppenschema.*

Wenn X bezüglich T eine τ -faktorielle Fläche ist, dann ist Y bezüglich $f(T)$ eine τ -faktorielle Fläche.

Angenommen, die erste Bedingung ist erfüllt; da der Eckenhomomorphismus die Tangentialabbildung von $\text{Pic}_{X/k}^0 \rightarrow \text{Pic}_{\mathfrak{X}/k}^0$ ist, muss dessen Kokern verschwinden. Wir können also (2.3.9) anwenden und schliessen, dass $\text{Pic}^0(X) \rightarrow \text{Pic}^0(\mathfrak{X})$ über \mathbb{Q} surjektiv ist. Die Behauptung folgt also aus (2.3.4).

Ist die zweite Bedingung erfüllt, so benutzen wir einfach, dass die rationalen Punkte des additiven Gruppenschemas α_k eine Torsionsgruppe sind, wenn der Grundkörper k von Charakteristik $p > 0$ ist. QED.

Als weiteren nützlichen Spezialfall heben wir hervor:

(2.3.6) Korollar. *Eine normale Fläche Y mit $H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ ist τ -faktoriell.*

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Auflösung der Singularitäten; in der exakten Sequenz

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) \longrightarrow H^2(Y, \mathcal{O}_Y)$$

verschwindet die rechte Gruppe, also muss der linke Pfeil surjektiv sein, und die Behauptung folgt aus (2.3.5). QED.

Wenden wir uns nun dem Grundkörper zu. Je kleiner er ist, so grösser ist die Chance einer Fläche, τ -faktoriell zu sein:

(2.3.7) Korollar. *Eine normale Fläche über einem endlichen Grundkörper ist τ -faktoriell.*

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Auflösung der Singularitäten, $R \subset X$ die dabei kontrahierte Kurve, und \mathfrak{X} die Komplettierung an dieser Kurve. Das Gruppenschema $\text{Pic}_{\mathfrak{X}/k}^0$ ist vom endlichen Typ über dem Grundkörper k , enthält also nur endlich viele rationale Punkte, und $\text{Pic}^0(\mathfrak{X})$ muss eine endliche Gruppe sein. Die Behauptung folgt nun aus (2.3.4). QED.

(2.3.8) Korollar. *Eine normale Fläche Y mit $H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ oder endlichem Grundkörper ist projektiv.*

Dies folgt aus den obigen Aussagen. QED.

Wir tragen nun folgendes allgemeines Resultat über die Picard-Gruppe von eigentlichen algebraischen Schemata nach:

(2.3.9) Proposition. *Sei $X \subset Y$ eine abgeschlossene Einbettung von eigentlichen k -Schemata und G das Gruppenschema, welches durch die exakte Sequenz*

$$\text{Pic}_{Y/k}^0 \longrightarrow \text{Pic}_{X/k}^0 \longrightarrow G \longrightarrow 0$$

definiert ist. Angenommen, das Gruppenschema G verschwindet, oder es ist unipotent und die Charakteristik des Grundkörpers ist $p > 0$. Dann ist der Kokern von $\text{Pic}^0(Y) \rightarrow \text{Pic}^0(X)$ eine Torsionsgruppe.

Sei \mathcal{L} ein numerisch trivialer, invertierbarer \mathcal{O}_X -Modul und $l \in \text{Pic}_{X/k}^0$ der entsprechende rationale Punkt. Angenommen, die zweite Bedingung ist erfüllt. Die rationalen Punkte des additiven Gruppenschemas $\alpha_k = \text{Spec}(k[T])$ bilden eine Torsionsgruppe, da $\alpha(k) = k$ von $p \neq 0$ annulliert wird. Da G eine Zerlegungsreihe besitzt, deren Quotienten Untergruppen von α_k sind [SGA 3, XVII 1.3], muss auch $G(k)$ eine Torsionsgruppe sein. Indem wir \mathcal{L} durch ein Vielfaches ersetzen, können wir annehmen, dass der Punkt l auf das neutrale Element von G abgebildet wird; es gibt also einen abgeschlossenen Punkt $m \in \text{Pic}_{Y/k}^0$, der auf l abbildet. Betrachten wir zunächst den Fall, dass der

Grundkörper algebraisch abgeschlossen ist. Dann wird der Punkt m durch einen numerisch trivialen, invertierbaren \mathcal{O}_Y -Modul \mathcal{M} repräsentiert, dessen Einschränkung \mathcal{L} ist. Behandeln wir nun den allgemeinen Fall. Sei $k \subset k'$ der algebraische Abschluss, $X' = X \otimes k'$, und $Y' = Y \otimes k'$. Indem wir \mathcal{L} durch ein Vielfaches ersetzen, lässt sich sein Urbild $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{X'}$ zu einem numerisch trivialen, invertierbaren $\mathcal{O}_{Y'}$ -Modul \mathcal{M}' fortsetzen. Nach [EGA IV, 8.5.2] und [EGA IV, 8.5.5] gilt dies schon auf einem endlichen Zwischenkörper von $k \subset k'$; wir ändern die Notation und bezeichnen mit k' so einen endlichen Oberkörper, dessen k -Dimension n sei. Die Projektionen $p : Y' \rightarrow Y$ ist lokal frei vom Rang n , und es gibt nach [EGA II, 6.5.8] ein kommutatives Diagramm von Normhomomorphismen

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic}(Y') & \longrightarrow & \text{Pic}(X') \\ N_{Y'/Y} \downarrow & & \downarrow N_{X'/X} \\ \text{Pic}(Y) & \longrightarrow & \text{Pic}(X). \end{array}$$

Da $\mathcal{L}^{\otimes n} = N_{X'/X}(\mathcal{L}')$ gilt, muss diese Potenz durch $\mathcal{M} = N_{Y'/Y}(\mathcal{M}')$ fortgesetzt werde. Es bleibt zu zeigen, dass \mathcal{M} numerisch trivial ist. Da der Norm-Homomorphismus mit Basiswechsel verträglich ist, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass Y eine irreduzible Kurve ist. Dann lässt sich \mathcal{M}' durch eine Linearkombination $D' = \sum n_{y'} D'_{y'}$ von effektiven irreduziblen Divisoren mit $\sum n_{y'} \text{long}(D'_{y'}) = 0$ repräsentieren. Der entsprechend Zyklus $Z' = \sum n_{y'} \text{long}(D'_{y'})$ und sein Bild $p_*(Z')$ haben offenbar Grad 0, also gilt dies nach [EGA IV, 21.10.17] auch für das Bild des Divisors $f_*(D')$. QED.

2.4. Verbesserung von Divisoren

Die dritte Bedingung in unserem Hauptresultat (2.2.2) verlangt, dass man den Zyklus D , der in einer Umgebung von $R \subset X$ ein Divisor ist, auf den infinitesimalen Umgebungen von R zu trivialen Moduln verbessern kann. Wir untersuchen daher in diesem Abschnitt, unter welchen Umständen diese Verbesserung durchführbar ist. Unsere erste Anwendung benutzt den dualisierenden Modul, wogegen die zweite nur in Charakteristik $p > 0$ funktioniert.

(2.4.1) Proposition. *Sei X eine normale Fläche, $R \subset X$ eine Kurve, und $A \in Z^1(X)$ ein Zyklus, der in einer Umgebung der Kurve ein Divisor ist und dessen Schnitzzahl mit jeder irreduziblen Komponente von R verschwindet. Sei $m > 0$ eine natürliche Zahl. Wenn die lineare Klasse von $K_X + mR$ nicht*

effektiv ist, dann gibt es eine natürliche Zahl $n > 0$ und einen numerisch trivialen Divisor $B \in \text{Div}(X)$ so, dass der von $nA + B$ repräsentierte Modul auf der m -ten infinitesimalen Umgebung von R trivial ist.

Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-mR) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_{mR} \longrightarrow 0$$

liefert eine exakte Sequenz

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^1(R, \mathcal{O}_{mR}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X(-mR)),$$

deren rechte Gruppe dual zu $H^0(X, \omega_X(mR))$ ist; da $K_X + mR$ nicht effektiv ist, verschwindet diese Gruppe, folglich ist

$$\text{Pic}_{X/k}^0 \longrightarrow \text{Pic}_{mR/k}^0$$

surjektiv. Sei \mathcal{L} der reflexive Modul, der durch A vertreten wird; ersetze ich diese Zyklen durch ein geeignetes Vielfaches, so findet sich nach (2.3.9) ein numerisch trivialer, invertierbarer \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{N} , dessen Einschränkung auf mR mit der von \mathcal{L} übereinstimmt. QED.

(2.4.2) Bemerkung. Die Bedingung ist a priori erfüllt, wenn die numerische Klasse von $K_X + mR$ nicht pseudo-effektiv ist.

Unsere zweite Anwendung besagt, dass man in Charakteristik $p > 0$ nur für die erste infinitesimale Umgebung zu sorgen hat, alles weitere folgt aus der p -Torsion der unipotenten Gruppen:

(2.4.3) Proposition. Sei X eine normale Fläche über einem Grundkörper der Charakteristik $p > 0$ und $R \subset X$ eine Kurve. Sei $A \in Z^1(X)$ ein 1-Zyklus, der auf einer Umgebung von der Kurve ein Divisor ist, und dessen reflexiver Modul auf R trivial ist. Dann ist der reflexive Modul von $p^n A$ auf der n -ten infinitesimalen Umgebung von R trivial.

Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach n . Betrachten wir die exakte Sequenz

$$H^1(X, \mathcal{O}_R(-R)) \longrightarrow \text{Pic}((n+1)R) \longrightarrow \text{Pic}(nR).$$

Nach Induktionsannahme ist $\mathcal{L}^{\otimes p^n}$ auf nR trivial. Die linke Gruppe ist ein k -Vektorraum, wird also von $p \neq 0$ annulliert. Folglich muss $\mathcal{L}^{\otimes p^{n+1}}$ auf $(n+1)R$ trivial sein. QED.

2.5. Anwendungen und Beispiele

In diesem Abschnitt benutzen wir die Beobachtungen aus den letzten beiden Abschnitten, um einige nützliche Anwendungen von unserem Kontraktionsatz auf τ -faktoriellen Flächen zu erhalten. Im Folgenden sei X eine normale Fläche, $R \subset X$ eine zusammenhängende Kurve, auf dem die Schnittform negativ definit ist, und \mathfrak{X} die Kompletterung an dieser Kurve. Unsere Resultate benutzen die Kohomologie der formalen Garbe $\mathcal{O}_{\mathfrak{X}}$, die Position des dualisierenden Modul ω_X , oder die Charakteristik des Grundkörpers, um Kontraktions-Kriterien zu erhalten.

Die erste Anwendung kann als Verallgemeinerung von Castelnuovos Kriterium verstanden werden:

(2.5.1) Proposition. *Angenommen, X ist τ -faktoriell bezüglich R . Wenn $H^1(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = 0$ gilt, dann existiert eine Kontraktion $f : X \rightarrow Y$ von R .*

Sei A ein Zykel, der eine Stützform bezüglich R ist; wegen der τ -Faktorialität können wir annehmen, dass er in einer Umgebung von R ein Divisor ist. Sei \mathcal{L} der entsprechende reflexive Modul. Da $H^1(\mathfrak{X}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = 0$ gilt, muss auf der Kompletterung \mathfrak{X} jeder numerisch triviale invertierbare Modul bereits trivial sein. Die Behauptung folgt nun aus (2.2.2). QED.

In positiver Charakteristik können wir auf der Kurve R unipotente Singularitäten zulassen:

(2.5.2) Proposition. *Angenommen, X ist τ -faktoriell bezüglich R . Wenn der Grundkörper von Charakteristik $p > 0$ und das Gruppenschema $\text{Pic}_{R/k}^0$ unipotent ist, dann existiert eine Kontraktion $f : X \rightarrow Y$ von R .*

Wie im Beweis von (2.5.1) findet sich ein Stützform $A \in Z^1(X)$, die auf einer Umgebung von R ein Divisor ist; sei \mathcal{L} der entsprechende reflexive Modul. Sei $m > 0$ eine natürliche Zahl. Dann ist $\text{Pic}_{mR/k}^0$ ein unipotentes Gruppenschema, also muss $\text{Pic}^0(mR)$ eine Torsionsgruppe sein, und eine geeignete Potenz von \mathcal{L} ist auf der infinitesimalen Umgebung mR trivial. Somit lässt sich (2.2.2) anwenden. QED.

Die nächste Anwendung ist wichtig für die potentielle Enriques-Klassifikation von normalen Flächen gemäß der Position der kanonischen Klasse:

(2.5.3) Proposition. *Angenommen, X ist τ -faktoriell bezüglich R . Wenn für jede natürliche Zahl $n > 0$ die lineare Klasse von $K_X + nR$ nicht effektiv ist, dann existiert eine Kontraktion $f : X \rightarrow Y$ von R .*

Nach (2.1.7) gibt es einen 1-Zyklus $A \in Z^1(X)$, der eine Stützform des pseudo-effektiven Kegels $\overline{NE}(X)$ an dem extremalen Unterkegel ist, der von den irreduziblen Komponenten von R erzeugt wird. Wegen der τ -Faktorialität können wir annehmen, dass A in einer Umgebung $U \subset X$ von R ein Divisor ist. Sei $m > 0$ eine natürliche Zahl; nach (2.4.1) findet sich eine natürliche Zahl $n > 0$ und ein numerisch trivialer Divisor $B \in \text{Div}(X)$ so, dass der Modul zu $nA + B$ auf der infinitesimalen Umgebung mR trivial ist. Also sind die Bedingungen von (2.2.2) erfüllt, und die gesuchte Kontraktion existiert. QED.

In positiver Charakteristik lässt sich dies vereinfachen:

(2.5.4) Proposition. *Angenommen, X ist τ -faktoriell bezüglich R . Wenn der Grundkörper von Charakteristik $p > 0$ und die lineare Klasse $K_X + R$ nicht effektiv ist, dann existiert eine Kontraktion $f : X \rightarrow Y$ von R .*

Wie im Beweis von (2.5.1) findet sich ein Zyklus $A \in Z^1(X)$, der eine Stützform und auf einer Umgebung von R ein Divisor ist. Sei \mathcal{L} der entsprechende reflexive Modul. Nach (2.4.1) können wir annehmen, dass er auf R trivial ist. Nach (2.4.3) ist die Bedingung von (2.2.2) erfüllt, und die gesuchte Kontraktion muss existieren. QED.

Schliesslich darf der Fall von endlichen Grundkörpern nicht unerwähnt bleiben:

(2.5.5) Proposition. *Über einem endlichen Grundkörper lässt sich jede negativ definite Kurve $R \subset X$ kontrahieren.*

Nach (2.3.8) ist X eine τ -faktorielle Fläche. Wie im Beweis von (2.5.3) findet sich ein 1-Zyklus $A \in Z^1(X)$, der eine Stützform ist, und auf einer Umgebung $U \subset X$ von R ein Divisor ist. Da $\text{Pic}_{nR/k}^0$ ein Gruppenschema von endlichem Typ über k ist, müssen die $\text{Pic}^0(nR)$ endlich, also a priori torsion sein, und durch Übergang zu Vielfachen wird \mathcal{L} auf den infinitesimalen Umgebungen nR trivial. Die Behauptung folgt also aus (2.2.2). QED.

(2.5.6) Ist X regulär, so bezeichnet man eine integrale Kurve $R \subset X$ mit $R^2 < 0$ und $R \cdot K_Y < 0$ als exzeptionellen Divisor *der ersten Art*. Er ist isomorph zur projektiven Gerade über dem Oberkörper $k \subset \Gamma(R, \mathcal{O}_R)$ und lässt sich nach dem Satz von Castelnuovo zu einer glatten Fläche kontrahieren.

Betrachten wir nun die Situation, dass X nur normal ist, und eine integrale Kurve R die Bedingung $R^2 < 0$ und $R \cdot K_Y < 0$ erfüllt. Sei $X' \rightarrow X$ die minimale Auflösung der Singularitäten und $R' \subset X'$ die strikt transformierte von R . Dann gilt $R'^2 \leq R^2 < 0$ und

$$R' \cdot K_{X'} = R \cdot K_X + R' \cdot K_{X/Y}.$$

Da X' die minimale Auflösung ist, muss $K_{X/Y}$ relativ pseudo-ampel sein, also negative Koeffizienten haben; folglich gilt $R' \cdot K_{X/Y} < 0$, also $R' \cdot K_{X'} < 0$, und $R' \subset X'$ ist eine exzeptionelle Kurve der ersten Art.

(2.5.7) Wir konstruieren nun als Gegenbeispiel eine negativ definite Kurve, die sich *nicht* kontrahieren lässt. Dieses Beispiel legt nahe, dass kontrahierbare Kurven in der Tat *exzeptionell* sind. Sei Y eine reguläre Fläche, $C \subset Y$ eine zusammenhängende, reduzierte Kurve, und $C' \subset C$ ein ampler effektiver Divisor in $\text{Reg}(C)$. Man sieht leicht, dass für eine geeignete Folge von Aufblasung $f : X \rightarrow Y$ mit Zentrum $C' \subset Y$ das strikte Urbild $R \subset X$ negativ definit wird.

Angenommen, es existiert eine Kontraktion $g : X \rightarrow Z$ von R . Sei $z \in Z$ das Bild der exzeptionellen Kurve und $V \subset Z$ eine affine offene Umgebung; ihr Komplement $Z' \subset Z$ ist rein 1-dimensional, und für die strikt transformierte $Y' \subset Y$ gilt nach Konstruktion $Y' \cap C = C'$. Dies hat eine bemerkenswerte Konsequenz für die Picard-Gruppe: Es gibt einen effektiven Divisor auf Y , dessen Einschränkung auf C existiert und Träger C' hat.

Nehmen wir nun an, dass der Grundkörper k von Charakteristik 0 ist oder transzendente Elemente enthält. Wir wählen für $C \subset Y$ nun eine Kurve so, dass die Einschränkung $\text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(C)$ selbst nach Tensorierung mit \mathbb{Q} nicht surjektiv ist. Dies lässt bewerkstelligen, indem wir eine Kurve mit hinreichend vielen Singularitäten wählen; diese erzeugen eine Untergruppe

$$\left(\prod_{c \in C} \mathcal{O}_{B,c}^\times / \mathcal{O}_{C,c}^\times \right) / \Gamma(C, \mathcal{O}_C)^\times \subset \text{Pic}(C),$$

wobei $B \rightarrow C$ die Normalisierung ist [EGA IV, 21.8.5]. Wählen wir hinreichend viele nodale Singularitäten, so ergeben sich multiplikative Subquotienten, die nicht im Bild von $\text{Pic}(Y)$ liegen können. Angenommen, für jedes

$C' \subset C$ existiert eine Kontraktion von $R \subset X$ wie oben. Da jeder invertierbare \mathcal{O}_C -Modul bis auf Vielfache durch eine Linearkombination von effektiven Divisor mit Träger in $\text{Reg}(C)$ vertreten wird, muss die Abbildung $\text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(C)$ über den rationalen Zahlen surjektiv sein, Widerspruch! Also gibt es Aufblasungen, auf denen die strikt Transformierte von C negativ definit aber nicht kontrahierbar ist.

3. Faserungen von normalen Flächen

Wir haben im vorangegangenen Kapitel birationale Kontraktionen von Flächen untersucht. Es stellt sich die Frage, was über Kontraktionen mit 1-dimensionalem Bild gesagt werden kann. In diesem Kapitel untersuchen wir daher folgende Frage: Gegeben eine normale Fläche Y , gibt es eine Faserung $g : Y \rightarrow C$ über einer Kurve C ?

Wir hätten gerne ein numerisches Kriterium für die Existenz solcher Faserungen, in dem nur die Schnittform auf $N(Y, \mathbb{R})$, der pseudo-effektive Kegel, und die Position der kanonischen Klasse K_Y auftaucht. Das Hauptresultat dieses Kapitels ist die Charakterisierung von solchen Faserungen, falls die generische Kurve Y_η vom Geschlecht 0 ist:

(3.0.8) Theorem. *Ein Strahl $P \subset N(Y, \mathbb{R})$, erzeugt von einem pseudo-amplen Element $e \in P$, wird von einer Faserung $g : Y \rightarrow C$ vom Geschlecht 0 induziert genau dann, wenn $e^2 = 0$ und $e \cdot K_Y < 0$ gelten.*

Dies ist ein nützliches Resultat, da die Bedingungen $e^2 = 0$ und $e \cdot K_Y < 0$ rein *numerisch* sind, während die Existenz einer Faserung eine geometrische Bedingung ist.

Das Ergebnis ist nützlich in der Enriques-Klassifikation von normalen Flächen: Falls die kanonische Klasse nicht pseudo-effektiv ist, erlaubt die Fläche wahrscheinlich eine Faserung vom Geschlecht 0.

Es sind auch Anwendungen in der höherdimensionalen Geometrie denkbar: Da unser Grundkörper beliebig ist, kann Y die generische Faser eines eigentlichen Morphismus oder der generische Flächenschnitt eines normalen Schemas im projektiven Raum sein.

Was ist bereits bekannt über das Problem? In der klassischen Arbeit von Mumford [14] wird gezeigt, dass eine glatte Fläche mit $C \cdot K_Y < 0$ für eine Kurve $C \subset Y$ geregelt, also birational zu einer geometrischen Regelfläche ist. Erwähnenswert ist Iskovskihs Arbeit [10] über glatte Flächen mit $H^1(\mathcal{O}_Y) = 0$ und $H^0(\omega_Y^2) = 0$. Auf Seite 23 wird gefragt, in wie weit man seine Resultate auf reguläre, aber nicht-glatte Flächen übertragen kann, und unser Resultat lässt sich auf dieses Problem anwenden. Schließlich gibt es Moris fundamentale Arbeit [16], in der unter anderem extremale Strahlen auf glatten Flächen studiert werden. Moris Ansatz betont die Rolle der kontrahierten Kurven, wogegen wir uns hauptsächlich auf den Strahl der kontraktiven Garbe konzentrieren.

3.1. Allgemeine Beobachtungen

(3.1.1) In diesem Abschnitt stellen wir einige Resultate über Faserungen von Flächen zusammen. Unter einer Fläche wollen wir im Folgenden immer ein normales, irreduzibles, 2-dimensionales Schema verstehen, das eigentlich über einem Grundkörper k ist. Unter einer *Faserung* verstehen wir eine eigentliche Kurve C und einen Morphismus $g : Y \rightarrow C$ mit $\mathcal{O}_C \rightarrow g_*(\mathcal{O}_Y)$ bijektiv. Dies bewirkt, dass die Kurve regulär und der Morphismus flach ist.

Die fundamentale Invariante einer Faserung ist ihr *Geschlecht*: Ist $\eta \in C$ der generische Punkt, so ist die generische Faser Y_η eine reguläre, irreduzible, eigentliche Kurve über dem Funktionenkörper $\kappa(\eta)$ mit $h^0(\mathcal{O}_{Y_\eta}) = 1$. Wir bezeichnen die Zahl $h^1(\mathcal{O}_{Y_\eta})$ als das Geschlecht der Faserung. Da die generische Faser geometrisch irreduzibel ist, gibt es nach [EGA IV, 9.7.8] nur endlich viele Faser Y_c , die nicht geometrisch irreduzibel sind.

(3.1.2) Wie man leicht sieht, ist jede eigentliche algebraische Kurve projektiv. Ist $g : Y \rightarrow C$ eine Faserung und \mathcal{M} ein ample invertierbarer \mathcal{O}_C -Modul, so gilt $c_1^2(\mathcal{L}) = 0$ für sein Urbild $\mathcal{L} = g^*(\mathcal{M})$, und die Kurve kann als das homogenen Spektrum von $\Gamma(Y, \text{Sym } \mathcal{L})$ zurückgewonnen werden. Jede Faserung der Fläche Y wird also durch einen *kontraktiven* invertierbaren \mathcal{O}_Y -Modul \mathcal{L} definiert, der nicht numerisch trivial ist und $c_1^2(\mathcal{L}) = 0$ erfüllt. Zwei solche Moduln liefern isomorphe Faserungen genau dann, wenn sie den gleichen Strahl $P \subset N^1(Y, \mathbb{R})$ erzeugen.

Wir würden gerne den Prozess umkehren: Gegeben so ein Strahl P , der von einem pseudo-amplen Element $e \in P$ mit $e^2 = 0$ erzeugt wird, definiert er eine Faserung $g : Y \rightarrow C$? Dabei stehen wir vor drei Problemen: Lässt sich ein Erzeuger e mit ganzzahligen Koordinaten finden? Können wir diese Klasse durch einen Divisor D repräsentieren? Besitzt der entsprechende invertierbare Modul \mathcal{L} ein global erzeugtes Vielfaches? Wir halten zunächst folgendes Resultat fest:

(3.1.3) Proposition. *Unter den obigen Voraussetzungen definiert unser Strahl P eine Faserung $g : Y \rightarrow C$ genau dann, wenn er von einem integren effektiven Divisor D erzeugt wird, für den die Zahlenfolge $h^0(Y, \mathcal{L}^{\otimes n})$ nicht konstant ist.*

Die Bedingung ist hinreichen: da $h^0(Y, \mathcal{L}^{\otimes n})$ nicht-konstant ist, muss für eine natürliche Zahl $n > 0$ die rechte Abbildung

$$0 \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{L}^{\otimes n-1}) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{L}^{\otimes n}) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{L}_D^{\otimes n});$$

nicht verschwinden; also gibt es einen globalen Schnitt s von $\mathcal{L}^{\otimes n}$, dessen Einschränkung auf D nicht verschwindet. Nach (1.2.3) ist \mathcal{L} kontraktiv, und das homogene Spektrum von $\Gamma(Y, \text{Sym}(\mathcal{L}))$ liefert eine Kontraktion $f : Y \rightarrow C$. Der Beweis der Umkehrung ist einfach und wird übergangen. QED.

Gemäß dem nächsten Resultat müssen wir uns nicht über die Singularitäten der Fläche sorgen:

(3.1.4) Proposition. *Sei $P \subset N(Y, \mathbb{R})$ wie oben und $h : X \rightarrow Y$ ein birationaler Morphismus. Dann definiert P eine Faserung auf Y genau dann, wenn das Urbild $h^*(P)$ eine Faserung auf X definiert.*

Die Bedingung ist trivialerweise notwendig. Angenommen, $h^*(P)$ definiert eine Faserung $f : X \rightarrow C$, die durch einen Divisor $D \subset X$ definiert wird. Ist $R \subset X$ eine von h kontrahierte irreduzible Kurve, so gilt $R \cdot D = 0$, also liegt R in den Fasern von f , und nach [EGA II, 8.11.1] ergibt sich eine Faktorisierung $g : Y \rightarrow C$. QED.

Wir können den Grundkörper beliebig vergrößern, wenn wir uns auf transzendente Erweiterungen beschränken:

(3.1.5) Proposition. *Sei $P \subset N(Y, \mathbb{R})$ wie oben, $k \subset k'$ eine rein transzendente Körpererweiterung, und $Y' = Y \otimes k'$. Dann definiert P eine Faserung auf Y genau dann, wenn sein Urbild $P' \subset N(Y', \mathbb{R})$ eine Faserung auf Y' definiert.*

Da die Körpererweiterung rein transzendent ist, muss Y' eine normale, irreduzible Fläche sein. Die Bedingung ist offenbar notwendig. Nach [SGA 6, 7.17.4] ist die Abbildung $K.(Y) \rightarrow K.(Y')$ der K -Gruppen kohärenter Garben bijektiv, und wir schließen, dass auch die Abbildung $\text{Pic}(Y) \rightarrow \text{Pic}(Y')$ bijektiv ist. Also gibt es einen invertierbaren \mathcal{O}_Y -Modul \mathcal{L} , für den \mathcal{L}' global erzeugt ist und eine Faserung definiert; nach dem üblichen *fpqc*-Abstieg muss \mathcal{L} die gesuchte Faserung definieren. QED.

(3.1.6) Die Existenz einer Faserung $g : Y \rightarrow C$ hat gewisse Konsequenzen für die Gruppe der numerischen Klassen. Ist $c \in C$ ein abgeschlossener Punkt, so bezeichnen wir mit $Z_c^1(Y) \subset Z^1(Y)$ die Gruppe, die von den irreduziblen Komponenten der Faser Y_c erzeugt wird. Nach [SGA 7, X 1.11] ist die Schnittform hierauf negativ, und ihr Radikal wird von Y_c erzeugt.

Ist $\eta \in C$ der generische Punkt, so müssen wir die *Periode* der Kurve Y_η betrachten; dies ist die natürliche Zahl $n > 0$, welche das Bild der Abbildung $\text{deg} : \text{Pic}(Y_\eta) \rightarrow \mathbb{Z}$ erzeugt. Mit diesen Daten erhalten wir eine partielle Zerlegung der Gruppe $N(Y)$:

(3.1.7) Proposition. *Sei $f : Y \rightarrow C$ eine Faserung und n die Periode der generischen Faser. Dann ist die Sequenz*

$$0 \longrightarrow \text{Div}^0(C) \longrightarrow \bigoplus Z_c^1(Y) \longrightarrow N(Y) \longrightarrow n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

ein Komplex, der an allen Termen ausser vielleicht an $N(Y)$ exakt ist.

Wir beweisen nur folgenden Teil: Sei $A = \sum A_c$ ein Element aus $\bigoplus Z_c^1(Y)$, das auf Y numerisch trivial ist. Angenommen, es gibt ein A_c , das kein rationales Vielfaches von Y_c ist; dann gibt es eine $A' \in Z_c^1(Y)$ mit $A \cdot A' \neq 0$, Widerspruch! Also gilt $A = \sum n_c Y_c$ für gewisse ganze Koeffizienten. Ist A' ein Zykel der generischen Länge $d \neq 0$, so gilt

$$0 = A \cdot A' = d \sum n_c [\kappa(c) : k].$$

Somit ist die Sequenz an allen Stellen exakt, ausser vielleicht an $N(Y)$. QED.

(3.1.8) Bemerkung. Es stellen sich folgende Fragen: Unter welchen Umständen ist die obige Sequenz exakt? Wann ist eine gefaserte Fläche projektiv? Wie viele Faserungen können auf einer Fläche existieren? Wie wir sehen werden, lassen sich diese Fragen für Faserungen vom Geschlecht 0 beantworten.

3.2. Faserungen vom Geschlecht 0

Werfen wir nun einen Blick auf die gefaserten Flächen $f : Y \rightarrow C$ vom Geschlecht 0. Die generische Faser Y_η ist also eine reguläre Kurve vom Geschlecht 0; diese wird durch $\omega_{Y_\eta}^\vee$ in den P_η^2 eingebettet, und wir können sie als reguläre Quadrik ansehen. Die Abbildung $\text{deg} : \text{Pic}(Y_\eta) \rightarrow \mathbb{Z}$ ist injektiv, und die generische Faser hat Periode 1 oder 2. Faserungen vom Geschlecht 0 sind wesentlich einfacher als Faserungen vom höheren Geschlecht. Für ihre Existenz haben wir zum Beispiel

(3.2.1) Proposition. *Sei $P \subset N(Y, \mathbb{R})$ ein Strahl, der von einem pseudo-ampeln Element $e \in P$ mit $e^2 = 0$ erzeugt wird. Dann definiert der Strahl P eine Faserung $f : Y \rightarrow C$ vom Geschlecht 0 genau dann, wenn er von einem integren effektiven Divisor D mit $D \cdot K_Y < 0$ erzeugt wird.*

Die Bedingung ist trivialerweise notwendig. Angenommen, sie ist erfüllt. Es gilt $D \cdot (K_Y - tD) < 0$; da D pseudo-ampel ist, müssen die Gruppen $H^2(Y, \mathcal{L}^{\otimes t})$ und $H^0(Y, \omega_Y \otimes \mathcal{L}^{\otimes -t})$ verschwinden; der Satz von Riemann-Roch liefert

$$h^0(Y, \mathcal{L}^{\otimes t}) \geq \chi(Y, \mathcal{L}^{\otimes t}) = \frac{t^2}{2}D^2 - \frac{t}{2}D \cdot K_Y + \chi(Y, \mathcal{O}_Y),$$

und die rechte Seite ist nicht nach oben beschränkt. Eine Anwendung von (3.1.3) beendet den Beweis. QED.

Die numerischen Eigenschaften von Faserungen vom Geschlecht 0 sind ebenfalls einfach:

(3.2.2) Proposition. *Sei $f : Y \rightarrow C$ eine Faserung vom Geschlecht 0 und n die Periode der generischen Faser. Dann ist der Komplex*

$$0 \longrightarrow \text{Div}^0(C) \longrightarrow \bigoplus Z_c^1(Y) \longrightarrow N(Y) \longrightarrow n\mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

eine exakte Sequenz.

Das meiste wurde bereits in (3.1.7) gezeigt. Sei \mathcal{M} ein fast-invertierbarer \mathcal{O}_Y -Modul, der auf der generischen Faser vom Grad 0 besitzt, also trivial ist. Dann verschwindet $R^1 f_*(\mathcal{M})_\eta$, also gibt es eine nicht-leere offene Teilmenge $U \subset C$ so, dass $f^{-1}(U)$ in $\text{Reg}(Y)$ enthalten ist und $R^1 f_*(\mathcal{M})$ auf U verschwindet. Nach [EGA III, 7.9.10] ist $f_*(\mathcal{M})$ auf U ein lokal freier Modul vom Rang $h^0(Y_\eta, \mathcal{O}_{X_\eta}) = 1$, also invertierbar. Verkleinern wir U , können wir annehmen, dass er trivial und $\mathcal{M} \rightarrow f^* f_*(\mathcal{M})$ bijektiv ist. Ich kann also \mathcal{M} auf $\text{Reg}(Y)$ durch eine Divisor D repräsentieren, dessen Träger disjunkt zu Y_η ist. Der Abschluss dieses Divisors ist ein 1-Zykel $A \in Z^1(Y)$, dessen Träger disjunkt zur generischen Faser ist, also in den abgeschlossenen Fasern enthalten sein muss. QED.

(3.2.3) Korollar. *Sei $f : Y \rightarrow C$ eine Faserung vom Geschlecht 0 und ρ der Rang von $N(Y)$. Für einen abgeschlossenen Punkt $c \in C$ sei ρ_c die Anzahl der irreduziblen Komponenten von $f^{-1}(c)$; dann gilt $\rho = 2 + \sum(\rho_c - 1)$.*

Das Bild von $\bigoplus Z_{Y_c}^1(Y)$ in $N(Y)$ erzeugt einen Untermodul vom Rang $1 + \sum(\rho_c - 1)$; die Behauptung folgt also aus (3.2.2). QED.

Eine nützliche Eigenschaft von Faserungen vom Geschlecht 0 ist, dass sie sich nicht häufen können:

(3.2.4) Proposition. *Sei $P_n \subset N(Y, \mathbb{R})$ eine Folge von Strahlen, die eine Faserung vom Geschlecht 0 definieren und gegen einen Strahl P konvergieren, der von einem pseudo-amplen Element $e \in P$ mit $e \cdot K_Y < 0$ erzeugt werden. Dann gilt $P = P_n$ bis auf endlich viele Ausnahmen; insbesondere definiert der Strahl P eine Faserung vom Geschlecht 0.*

Sei $y \in Y$ ein abgeschlossener Punkt und d die Dimension seines Restekörpers. Wie man leicht sieht, gibt es effektive Divisoren D_n mit $D_n \cdot K_Y = -2d$, die P_n erzeugen. Also gibt es eine Folge von positiven reellen Zahlen λ_n mit $e = \lim(\lambda_n D_n)$. Wegen

$$0 > e \cdot K_Y = \lim \lambda_n (D_n \cdot K_Y) = \lim(-2d\lambda_n)$$

konvergieren die Koeffizienten gegen $-e \cdot K_Y/2d$. Also muss auch die Folge D_n konvergieren, und wir können $\lambda_n = 1$ für alle Indices annehmen. Da die Doppelfolge (D_m, D_n) konvergiert, müssen die Schnittzahlen $D_m \cdot D_n$ gegen $e^2 = 0$ konvergieren. Also gilt $D_m \cdot D_n = 0$ für fast alle Indices, und die Folge muss nach dem Hodge-Index-Theorem fast konstant sein. QED.

3.3. Charakterisierung dieser Faserungen

Dieser Abschnitt enthält unser Hauptresultat über Faserungen und seinen Beweis:

(3.3.1) Theorem. *Sei Y eine normale, eigentliche, irreduzible, algebraische Fläche und $P \subset N^1(Y, \mathbb{R})$ ein Strahl, der von einem pseudo-amplen Element $e \in P$ erzeugt wird. Dann definiert dieser Strahl eine Faserung $f : Y \rightarrow C$ vom Geschlecht 0 genau dann, wenn $e^2 = 0$ und $e \cdot K_Y < 0$ gilt.*

Wir sahen bereits, dass die Bedingung notwendig ist; um zu zeigen, dass sie auch hinreichend ist, reicht es, einen integren effektiven Divisor $D \subset Y$ zu finden, der den Strahl P erzeugt (3.2.4). Wir erzwingen die Existenz so einer Kurve durch eine Technik, die ähnlich zu Moris „bend & break“ ist. Unser Beweis benötigt zwei Resultate über Kurven, die im nächsten Abschnitt zu lesen sind, und einigen vorbereitenden Bemerkungen, zu denen wir jetzt kommen. Wir benötigen zunächst ein Mittel, um einen reellen Strahl durch ganzzahlige Elemente zu approximieren:

(3.3.2) Lemma. *Sei E eine freie, endlich erzeugte Gruppe, P ein Strahl des reellen Vektorraumes $V = E \otimes \mathbb{R}$, und $U \subset V$ eine Nullumgebung. Dann enthält die Umgebung $P + U$ unendlich viele ganzzahlige Elemente.*

Sei $e \in P$ ein Erzeuger. Offenbar reicht es, den Fall $\mathbb{R}_+e \cap E = 0$ zu behandeln; sei $V' = V/\mathbb{R}e$ und $E' \subset V'$ das Bild von E ; dann ist $E \rightarrow E'$ bijektiv, und die Untergruppe $E' \subset V'$ kann nicht diskret sein [3, Top. gen., chap. VII, 1, No. 1, thm. 1]. Sei $U' \subset V'$ eine offene Nullumgebung mit $U' = -U'$, dessen Urbild in $\mathbb{R}e+U$ enthalten ist. Dann ist die Menge $U' \cap E' \subset (U + \mathbb{R}e) \cap E$ unendlich; da sie invariant unter Vorzeichenwechsel ist, muss auch $(U + P) \cap E$ unendlich sein. QED.

(3.3.3) Proposition. *Sei Y eine reguläre Fläche, $P \subset N(Y, \mathbb{R})$ ein Strahl, der von einem pseudo-amplen Element e mit $e^2 = 0$ und $e \cdot K_Y < 0$ erzeugt wird, und $U \subset N(Y, \mathbb{R})$ eine Nullumgebung. Für jede natürliche Zahl $n > 0$ gibt es einen Divisor D , dessen Klasse in $P + U$ enthalten ist und dessen invertierbarer Modul \mathcal{L} die Bedingungen $h^0(Y, \mathcal{L}) > n$ und $h^2(Y, \mathcal{L}^{-1}) = 0$ erfüllt.*

Ohne Einschränkung gelte $e \cdot K_Y < 3e \cdot u < -e \cdot K_Y$ für alle $u \in U$. Nach (3.3.2) gibt es für jede reelle Zahl $r_0 > 0$ eine reelle Zahl $r > r_0$, ein Element $u \in U$, und einen Divisor D , der $re + u$ vertritt. Für $\sigma = 1$ oder $\sigma = -1$ gilt

$$\begin{aligned} e \cdot (K_Y + \sigma D) &= e \cdot (K_Y + \sigma re + \sigma u) \\ &= e \cdot K_Y + \sigma e \cdot u \\ &\leq e \cdot K_Y - \frac{1}{3}e \cdot K_Y \\ &< 0, \end{aligned}$$

also sind $K_Y + \sigma D$ nicht effektiv, und die Gruppen $H^2(Y, \mathcal{L}^{-1})$ und $H^2(Y, \mathcal{L})$ verschwinden. Nach dem Satz von Riemann-Roch gilt

$$h^0(Y, \mathcal{L}) \geq \chi(Y, \mathcal{O}_Y) = \frac{1}{2}D \cdot (D - K_Y) + \chi(Y, \mathcal{O}_Y),$$

und der Term

$$\begin{aligned} D \cdot (D - K_Y) &= (re + u)(re + u - K_Y) \\ &= r(2eu - eK_Y) + u^2 - uK_Y \\ &\geq r(2/3 - 1)eK_Y + u^2 - uK_Y \end{aligned}$$

wird für r hinreichend groß beliebig groß. QED.

(3.3.4) Korollar. *Voraussetzungen wie in (3.3.3). Sei $Y' \subset Y$ eine diskrete, abgeschlossene Teilmenge. Dann gibt es einen effektiven Divisor D , der Y' enthält, dessen Klasse in $P + U$ liegt, und für den der Homomorphismus $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D)$ surjektiv ist.*

Sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Y$ das Ideal von Y' und $n = h^0(Y', \mathcal{O}_{Y'})$. Wählen wir einen invertierbarer Modul \mathcal{L} wie in (3.3.3), erhalten eine exakte Sequenz

$$H^0(Y, \mathcal{L} \otimes \mathcal{I}) \longrightarrow H^0(Y, \mathcal{L}) \longrightarrow H^0(Y', \mathcal{O}_{Y'}),$$

dessen rechter Pfeil aus Ranggründen nicht injektiv ist. Also gibt es einen globalen Schnitt s von \mathcal{L} , dessen dualer Homomorphismus $\mathcal{L}^\vee \rightarrow \mathcal{O}_Y$ über $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Y$ faktorisiert. Dann definiert (\mathcal{L}, s) einen effektiven Divisor $D \in \text{Div}(Y)$ mit $Y' \subset D$. In der exakten Sequenz

$$H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \longrightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D) \longrightarrow H^2(Y, \mathcal{O}_Y(-D))$$

verschwindet nach Konstruktion der rechte Term. Also ist $H^1(Y, \mathcal{O}_Y) \rightarrow H^1(D, \mathcal{O}_D)$ surjektiv. QED.

(3.3.5) Wir kommen nun zum Beweis unseres Hauptresultats (3.3.1). Wenden wir (3.1.4) und (3.1.5) an, so können wir zusätzlich unterstellen, dass die Fläche Y regulär und der Grundkörper überabzählbar ist.

Wir beginnen mit der Konstruktion einer unendlichen Teilmenge $T \subset Y$ abgeschlossener Punkte, welche den folgenden beiden Bedingungen genügt:

- (i) Jede integrale Kurve $A \subset Y$ mit $A^2 < 0$ ist disjunkt zu T .
- (ii) Jede integrale Kurve $A \subset Y$ mit $A^2 = 0$ enthält höchstens einen Punkt aus T .

Wir konstruieren induktiv eine aufsteigende Folge $T_n \subset Y$ mit n Elementen. Sei $T_0 = \emptyset$ und T_{n-1} bereits konstruiert. Da $N^1(Y)$ abzählbar ist, gibt es höchstens abzählbar viele Kurven wie in (i). Angenommen, es gibt überabzählbar viele Kurven wie in (ii), die einen Punkt aus T_{n-1} enthalten; dann sind zwei von ihnen, sagen wir A_1 und A_2 , numerisch äquivalent und enthalten den *gleichen* Punkt aus T_{n-1} ; somit gilt

$$0 = A_1^2 = A_1 \cdot A_2 > 0,$$

Widerspruch! Sei $C \subset Y$ eine irreduzible Kurve mit $C^2 > 0$; dann bilden die Schnittmengen $A \cap C$ für alle integralen Kurven A mit $A^2 < 0$ oder $A^2 = 0$

und $A \cap T_{n-1} \neq \emptyset$ eine abzählbare Teilmenge; nach [EGA IV, 4.1.2] enthält C aber überabzählbar viele abgeschlossene Punkte, also findet sich ein Punkt $y \in C$ so, dass $T_n = T_{n-1} \cup \{y\}$ unser Problem löst. Man könnte sagen, dass $T = \cup T_n$ in *allgemeiner Lage* bezüglich allen Kurven $A \subset Y$ mit $A^2 \leq 0$ ist.

Als nächstes müssen wir auf der Hut sein, dass unser Strahl P nicht von andere Strahlen gestört wird. Sei $\{P_n\}$ die Menge aller übrigen Strahlen, die Fasererungen vom Geschlecht 0 definieren. Nach (3.2.4) können wir annehmen, dass P nicht der Grenzwert von solchen Strahlen ist. Sei $a \in N(Y, \mathbb{R})$ eine ample Klasse so, dass die Hyperebene $N \subset N(Y, \mathbb{R})$ aller Elemente x mit $x \cdot a = 1$ den pseudo-effektiven Kegel *unterhalb* jedes ganzzahligen Punktes schneidet. Da der Erzeuger $e \in P \cap N$ kein Häufungspunkt der Erzeuger $e_n \in P_n \cap N$ ist, muss der Abstand zwischen $\{e_n\}$ und dem orthogonalen Komplement von P strikt positiv sein, und es gilt $e_n \cdot e > \epsilon$ für eine reelle Zahl $\epsilon > 0$. Sei $U \subset N(Y, \mathbb{R})$ ein Nullumgebung mit $e \cdot u < \epsilon$ für alle $u \in U$. Jede Relation $re + u = e_n + a$ für ein $u \in U$ und ein pseudo-effektives a liefert den Widerspruch

$$\epsilon > e \cdot u = e \cdot e_n + e \cdot a \geq \epsilon.$$

Also ist die Umgebung $P + U$ disjunkt zu allen affinen Kegeln $e_n + \overline{NE}(Y)$.

Wir betrachten nun diskrete, abgeschlossene Unterschemata $Y' \subset Y$, die von T getragen werden; für jedes solche Unterschema findet sich nach (3.3.4) ein effektiver Divisor D mit $Y' \subset D$, dessen numerisch Klasse in der Umgebung $P + U$ liegt, und dessen Geschlecht $h^1(\mathcal{O}_D)$ durch die Konstante $h = h^1(\mathcal{O}_Y)$ beschränkt ist. Die fundamentale Idee ist nun, das diskrete Schema Y' zu vergrößern und zu beobachten, was mit den Divisoren D passiert.

Sei $D = \sum \lambda_i D_i$ die Zerlegung in Primzyklen. Nach Konstruktion gilt $D_i^2 \geq 0$ für jeden Primzyklus, der Y' berührt. Angenommen, für kein Y' und D tritt ein Primzykel mit

$$D_i^2 = 0 \quad \text{und} \quad H^1(D_i, \mathcal{O}_{D_i}) = 0$$

auf; also gilt entweder $D_1^2 < 0$ und $D_i \cap Y' = \emptyset$, oder es gilt $D_i^2 = 0$ und $H^1(D_i, \mathcal{O}_{D_i}) \neq 0$, oder aber $D_i^2 > 0$; je nach dem sprechen wir von einem Primzyklus der *ersten*, *zweiten* oder *dritten* Sorte.

Ist $y \in Y'$ ein abgeschlossener Punkt, so sei μ_i die Multiplizität von D_i an diesem Punkt. Nach unserer Konstruktion verschwinden diese Multiplizitäten für Primzyklen der ersten Sorte. Da die Anzahl der Primzyklen der zweiten Sorte durch h beschränkt ist, können wir ein diskretes Unterschema Y' mit

mehr als h Punkten wählen und finden ein y so, dass die Multiplizitäten für die Primzyklen der zweiten Sorte verschwinden. Nach (3.4.3) sind alle Multiplizitäten μ_i beschränkt, und nach (3.4.1) sind die Multiplizitäten λ_i für die Primzyklen der dritten Sorte beschränkt. Ersetzen wir Y' durch eine genügend große infinitesimale Umgebung, so muss die Anzahl der Primzyklen D_i mit $\lambda_i > 0$ und $\mu_i > 0$ beliebig groß werden. Wir können also annehmen, dass es zwei Punkte $y, y' \in Y'$ gibt, die von mindestens $h + 2$ Zyklen der dritten Sorte berührt werden. Sei $A = \cup D_i$ die Vereinigung dieser Kurven, die durch einen der beiden Punkte gehen. Nach dem Hodge-Index-Theorem sind $D_i \cap D_j$ nicht-leer. Vertauschen wir y und y' wenn nötig, so können wir annehmen, dass $A \setminus \{y\}$ *zusammenhängend* ist.

Wir werden nun deduzieren, dass $h^1(\mathcal{O}_A) > h$, also auch $h^1(\mathcal{O}_D) > h$ gilt. Sei $X \rightarrow A$ die Normalisierung am Punkte y ; daraus ergibt sich ein cocartesisches Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & A, \end{array}$$

wobei $A' \subset A$ das Trägerschema von $\mathcal{O}_X/\mathcal{O}_A$ ist [17, IV.3, p. 68]. In unserer Situation besteht A' nur aus dem Punkt y , die Faser aber aus mindestens $h + 2$ Punkten. Sei B die Kurve, die durch das cocartesische Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X'' & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ A'' & \longrightarrow & B, \end{array}$$

definiert ist, wobei $A'' \subset A'$ und $X'' \subset X'$ die Reduktionen sind. Betrachten wir die exakte Sequenz

$$H^0(B, \mathcal{O}_B) \rightarrow H^0(A'', \mathcal{O}_{A''}) \oplus H^0(X, \mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(X'', \mathcal{O}_{X''}) \rightarrow H^1(B, \mathcal{O}_B).$$

Die zwei linken Terme sind durch Körper gegeben. Aus Dimensionsgründen gilt $h^1(\mathcal{O}_B) > h$. Also gilt auch $h^1(\mathcal{O}_D) > h$, Widerspruch!

Wir haben also die Existenz eines Divisors $D \subset Y$ mit numerischer Klasse in $P + U$ nachgewiesen, der eine integre Komponente D_i enthält mit $D_i^2 = 0$ und $H^1(\mathcal{O}_{D_i}) = 0$, also $D_i \cdot K_Y < 0$. So ein Divisor definiert eine Faserung vom Geschlecht 0, und nach der Wahl der Umgebung U muss er auch den Strahl P erzeugen. QED.

3.4. Zwei Lemmata über Kurven

In diesem Abschnitt notieren wir zwei Aussagen über das Verhalten von $H^1(D, \mathcal{O}_D)$ eines effektiven Divisoren D , die wir im Beweis unseres Hauptergebnisses benutzt haben.

(3.4.1) Proposition. *Sei Y eine eigentliche Fläche über und $D \subset Y$ ein integrier effektiver Divisor mit $D^2 > 0$. Dann ist für jede natürliche Zahl $n > 0$ die Abbildung $H^0(D, \mathcal{O}_{nD}) \rightarrow H^0(D, \mathcal{O}_D)$ bijektiv, und es gilt*

$$h^1(D, \mathcal{O}_{nD}) = \frac{n(n-1)}{2} D^2 - (n-1)\chi(D, \mathcal{O}_D) + h^1(D, \mathcal{O}_D).$$

Sei $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_Y$ das Ideal des Unterschemas $D \subset Y$; dann ist $\mathcal{N} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ invertierbar und es gilt $\deg(\mathcal{N}) = -D^2 < 0$. Da D integrier ist, muss $H^0(D, \mathcal{N}^{\otimes t})$ für alle natürlichen Zahlen $t > 0$ verschwinden. Aus dem Satz von Riemann-Roch ergibt sich

$$\begin{aligned} h^1(B, \mathcal{N}^{\otimes t}) &= -\chi(B, \mathcal{N}^{\otimes t}) \\ &= -t \deg(\mathcal{N}) - \chi(B, \mathcal{O}_B) \\ &= tD^2 - \chi(B, \mathcal{O}_B). \end{aligned}$$

Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}^{\otimes(t-1)} \longrightarrow \mathcal{O}_{tD} \longrightarrow \mathcal{O}_{(t-1)D} \longrightarrow 0$$

liefert eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_{tD}) \rightarrow \Gamma(\mathcal{O}_{(t-1)D}) \rightarrow H^1(\mathcal{N}^{\otimes(t-1)}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{tD}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_{(t-1)D}) \rightarrow 0$$

durch Induktion nach t ergibt sich $H^0(D, \mathcal{O}_{tD}) = H^0(D, \mathcal{O}_D)$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} h^1(D, \mathcal{O}_{nD}) - h^1(D, \mathcal{O}_D) &= \sum_{t=2}^n (h^1(D, \mathcal{O}_{tD}) - h^1(D, \mathcal{O}_{(t-1)D})) \\ &= \sum_{t=1}^{n-1} h^1(D, \mathcal{N}^{\otimes(t)}) \\ &= \sum_{t=1}^{n-1} (tD^2 - \chi(D, \mathcal{O}_D)) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} D^2 - (n-1)\chi(D, \mathcal{O}_D). \end{aligned}$$

QED.

(3.4.2) Bemerkung. Die Euler-Charakteristik $\chi(D, \mathcal{O}_D)$ einer integren Kurve D ist höchstens 1, wenn über dem Körper $\Gamma(D, \mathcal{O}_D)$ gerechnet wird; gilt $D^2 > 0$, so folgt $D^2 \geq \chi(D, \mathcal{O}_D)$, und die Zahl

$$\frac{n(n-1)}{2}D^2 - (n-1)\chi(D, \mathcal{O}_D)$$

ist für alle $n > 0$ positiv. Gleichheit kann nur in den Fällen $n = 1$ oder $n = 2$ und $\chi(D, \mathcal{O}_D) = 1$ eintreten.

(3.4.3) Proposition. Sei Y eine eigentliche Fläche über k , $y \in Y$ ein regulärer, abgeschlossener Punkt, $f : Y' \rightarrow Y$ die Aufblasung des Punktes, $D \subset Y$ ein integrer Divisor mit $y \in D$, und $D' \subset Y'$ die strikt transformierte von D . Dann gilt

$$h^1(\mathcal{O}_D) \geq \frac{m^2 - 3m}{2}d + h^1(\mathcal{O}_{D'}) + h^0(\mathcal{O}_D)$$

wobei m die Multiplizität von D am Punkte $y \in Y$ und d die k -Dimension von $\kappa(y)$ ist.

Sei $E \subset Y'$ der tautologische Divisor der Aufblasung, definiert durch das Ideal $\mathcal{O}_{Y'}(1)$. Das Urbild $C = Y' \times_Y C$ ist ein Divisor, der als Divisor in $C = D' + mE$ zerfällt; schreiben wir mE auch für die m -te infinitesimale Umgebung von E , so gilt $C = D' \cup mE$ als Unterschema, und wir erhalten eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{O}_{D'} \times \mathcal{O}_{mE} \longrightarrow \mathcal{O}_{D' \cap mE} \longrightarrow 0$$

und somit eine Gleichung

$$(3.4.3.3) \quad \chi(\mathcal{O}_C) = \chi(\mathcal{O}_{D'}) + \chi(\mathcal{O}_{mE}) - \chi(\mathcal{O}_{D' \cap mE}).$$

Betrachten wir diese Terme genauer; für alle $t > 0$ gilt

$$\chi(\mathcal{O}_{D' \cap tE}) = h^0(\mathcal{O}_{D' \cap tE}) = (C - mE) \cdot tE = mtd.$$

Das Schema E ist isomorph zu P_y^1 , und $\mathcal{O}_E(-E)$ entspricht $\mathcal{O}_{P_y^1}(1)$; aus der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_E((1-t)E) \longrightarrow \mathcal{O}_{tE} \longrightarrow \mathcal{O}_{(t-1)E} \longrightarrow 0$$

ergibt sich

$$\begin{aligned}
\chi(\mathcal{O}_{mE}) &= \chi(\mathcal{O}_E) + \sum_{t=1}^m (\chi(\mathcal{O}_{tE}) - \chi(\mathcal{O}_{(t-1)E})) \\
&= \sum_{t=1}^m \chi(\mathcal{O}_{P_y^1}(t-1)) \\
&= \frac{m(m+1)}{2}d.
\end{aligned}$$

Da D' ein integres Schema ist, muss $H^0(\mathcal{O}_{D'})$ ein Körper und $H^0(\mathcal{O}_{D'}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{D' \cap E})$ injektiv sein. Setzen wir in (3.4.3.3) ein, ergibt sich eine Abschätzung

$$\begin{aligned}
(3.4.3.4) \quad \chi(\mathcal{O}_C) &= h^0(\mathcal{O}_{D'}) - h^0(\mathcal{O}_{D' \cap mE}) - h^1(\mathcal{O}_{D'}) + \chi(\mathcal{O}_{mE}) \\
&\leq dm(1-m) - h^1(\mathcal{O}_{D'}) + \frac{m(m+1)}{2}d \\
&= \frac{3m-m^2}{2}d - h^1(\mathcal{O}_{D'}).
\end{aligned}$$

Die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{Y'}(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_{Y'} \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$$

liefert eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_{Y'}(-C)) \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_{Y'}) \longrightarrow f_*(\mathcal{O}_C) \longrightarrow R^1 f_*(\mathcal{O}_{Y'}(-C)),$$

deren rechter Term nach der Projektionsformel verschwindet, somit ist $\mathcal{O}_D \rightarrow f_*(\mathcal{O}_C)$ bijektiv. In der exakten Sequenz

$$R^1 f_*(\mathcal{O}_{Y'}) \longrightarrow R^1 f_*(\mathcal{O}_C) \longrightarrow R^2 f_*(\mathcal{O}_{Y'}(-C))$$

verschwinden die äußeren Terme ebenfalls, und es gilt $\chi(\mathcal{O}_C) = \chi(\mathcal{O}_D)$. Somit erhalten wir aus (3.4.3.4) eine Abschätzung

$$h^1(\mathcal{O}_D) \geq \frac{m^2 - 3m}{2}d + h^1(\mathcal{O}_{D'}) + h^0(\mathcal{O}_D).$$

QED.

(3.4.4) Bemerkung. Die Zahl $1/2(m^2 - 3m)$ ist positiv genau dann, wenn $m \geq 3$ gilt. Da $\kappa(y)$ eine Oberkörper von $H^0(D, \mathcal{O}_D)$ ist, muss $1/2(m^2 - 3m)d + h^0(\mathcal{O}_D)$ für $m = 1$ oder $m = 2$ negativ sein, und die Abschätzung wird trivial.

4. Normale del-Pezzo-Flächen

In der Enriques-Klassifikation unterscheidet man glatte Flächen Y nach ihrer Kodaira-Dimension $\kappa(Y) \in \{-\infty, 0, 1, 2\}$, also dem asymptotischen Verhalten der Plurigeschlechter $P_n = h^0(\omega_Y^n)$. Für normale Flächen scheint es günstiger, die *numerische* Klasse von K_Y und den pseudo-effektiven Kegel heranzuziehen. In diesem Kapitel studieren wir normale Flächen, deren kanonische Klasse K_Y nicht pseudo-effektiv ist; im glatten Fall sind dies die Flächen von Kodaira-Dimension $-\infty$. Wir zeigen, dass so eine Fläche eine Faserung vom Geschlecht 0 oder eine Kontraktion auf eine minimale del-Pezzo-Fläche erlaubt. Unser Hauptresultat ist eine Klassifikation von minimalen del-Pezzo-Flächen über einem Grundkörper der Charakteristik 0, die eine nicht-rationale Singularität enthalten.

Dieses Kapitel ist folgendermaßen gegliedert: Im ersten Abschnitt untersuchen wir Flächen mit K_Y nicht pseudo-effektiv und zeigen, dass sie sich durch Kontraktionen vereinfachen lassen. Im zweiten Abschnitt diskutieren wir eine Familie von Beispielen, nämlich Faserungen vom Geschlecht 0, deren Fasern irreduzibel sind. Im nächsten Abschnitt untersuchen wir die lokale Struktur von solchen Faserungen durch birationale Korrespondenzen, die wir *Mutationen* nennen. Im vierten Abschnitt benutzen wir Mutationen, um minimale del-Pezzo-Flächen mit einem sogenannten *guten Bündel* zu klassifizieren.

4.1. Flächen mit negativer kanonischer Klasse

In diesem Abschnitt studieren wir normale Flächen, deren kanonische Klasse nicht pseudo-effektiv ist. Im Folgenden verstehen wir unter einer Fläche weiterhin ein irreduzibles, 2-dimensionales, eigentliches Schema über einem Grundkörper.

(4.1.1) Sei Y eine normale Fläche, für die K_Y nicht in $\overline{\text{NE}}(Y)$ enthalten ist. Beispiele sind Flächen, für die $-K_Y$ im Inneren des pseudo-effektiven Kegels oder pseudo-amplen Kegels liegt. Ist $-K_Y$ ample, spricht man auch von *del-Pezzo-Flächen*. Ein weiteres Beispiel für Flächen mit K_Y nicht pseudo-effektiv sind Faserungen vom Geschlecht 0.

Unsere Flächen haben angenehme globale Eigenschaften:

(4.1.2) Lemma. *Eine Fläche Y mit K_Y nicht pseudo-effektiv ist τ -faktoriell und projektiv.*

Wegen $H^2(Y, \mathcal{O}_Y) = 0$ folgt dies aus (2.5.4). QED.

Unter birationalen Morphismen verhalten sich unsere Flächen folgendermaßen:

(4.1.3) Lemma. *Sei $f : X \rightarrow Y$ eine birationale Morphismus von normalen Flächen.*

- (i) *Wenn K_Y nicht pseudo-effektiv ist, dann gilt das Gleiche für K_X .*
- (ii) *Wenn X del Pezzo ist, dann ist auch Y del Pezzo.*
- (iii) *Wenn f die minimale Auflösung der Singularitäten ist, und $-K_Y$ pseudo-effektiv ist, dann gilt dies ebenfalls für $-K_X$.*

Die erste Aussage folgt aus $K_Y = f_*(K_X)$. Angenommen, $-K_Y$ ist ampel; dann gilt

$$K_Y \cdot A = f_*(K_X) \cdot A = K_X \cdot f^*(A) < 0$$

für jede integrale Kurve $A \subset Y$; weiterhin gilt

$$K_Y^2 = K_X^2 - K_{X/Y}^2 \geq K_X^2 > 0,$$

und $-K_Y$ ist ampel. Sei $R \subset X$ die exzeptionelle Kurve; der relative kanonische Zyklus $K_{X/Y}$ ist der eindeutige \mathbb{Q} -Zyklus mit Träger R , der durch die Gleichung

$$K_X = K_{X/Y} + f^*(K_Y)$$

definiert wird. Angenommen, f ist die minimale Auflösung der Singularitäten. Nach dem Castelnuovo-Kriterium ist $K_{X/Y}$ relativ pseudo-ampel, folglich sind seine Koeffizienten negativ. Ist $-K_Y$ pseudo-ampel, gilt also das Gleiche für $-K_X$. QED.

Das folgende Resultat besagt, dass man Flächen mit nicht pseudo-effektiver kanonischer Klasse vereinfachen kann:

(4.1.4) Theorem. *Eine normale Fläche Y mit K_Y nicht pseudo-effektiv erfüllt eine der folgenden drei Bedingungen:*

- (i) Es gibt eine birationale Kontraktion $f : Y \rightarrow Z$ einer Kurve $R \subset Y$ so, dass K_Z nicht pseudo-effektiv ist.
- (ii) Es gibt eine Faserung $g : Y \rightarrow C$ vom Geschlecht 0.
- (iii) Es gilt $\rho(Y) = 1$, und Y ist del Pezzo.

Hierbei ist $\rho(Y)$ der Rang von $N(Y)$. Gilt $\rho(Y) = 1$, muss $-K_Y$ trivialerweise ample sein. Angenommen, es gilt $\rho(Y) > 1$; dann ist jeder extremale Strahl des pseudo-effektiven Kegels negativ. Da K_Y nicht pseudo-effektiv ist, gibt es eine extremale Klasse $a \in N(Y, \mathbb{R})$ des pseudo-amplen Kegels mit $K_Y \cdot a < 0$. Sei $P \subset N(Y, \mathbb{R})$ der zu dieser Klasse orthogonale Kegel im Rand des pseudo-effektiven Kegels, und $P' \subset P$ ein extremaler Strahl. Angenommen, dieser Strahl ist negativ definit. Dann wird er von einer integren Kurve $R \subset Y$ mit $R^2 < 0$ erzeugt. Wegen $(K_Y + nR) \cdot a < 0$ kann die Klasse $K_Y + nR$ nicht effektiv sein, und nach (2.2.2) existiert eine birationale Kontraktion $f : Y \rightarrow Z$ von R . Wegen

$$a \cdot K_Z = a \cdot K_Y - a \cdot K_{Y/Z} < 0$$

ist K_Z nicht pseudo-effektiv. Angenommen, es gilt $e^2 = 0$ für einen Erzeuger von $e \in P$. Dann können wir $e = a$ setzen und erhalten gemäß (3.3.1) eine Faserung vom Geschlecht 0. QED.

(4.1.5) Bemerkung. Die Klassifikation der Flächen mit K_Y nicht pseudo-effektiv zerfällt also im wesentlichen in zwei Teilprobleme: Die Klassifikation von Faserungen vom Geschlecht 0, eine relativ leichte Aufgabe, und die Klassifikation der *minimalen del-Pezzo-Flächen*, ein äusserst schwieriges Problem. Im Folgenden werden wir einen Mittelweg beschreiten und solche minimalen del-Pezzo-Flächen klassifizieren, die durch Kontraktion einer Faserung entstehen.

4.2. Minimale Faserungen

In diesem Abschnitt diskutieren wir eine Klasse von normalen Flächen, nämlich Faserungen $g : Y \rightarrow C$ vom Geschlecht 0, deren Fasern *irreduzibel* sind. Für solche Flächen kann man die Struktur des pseudo-effektiven Kegels aus Dimensionsgründen explizit machen. Als Anwendung unserer Kontraktionssätze erhalten wir Kriterien, wann beide extremale Strahlen effektiv sind, und wann man Y zu einer minimalen del-Pezzo-Fläche Z kontrahieren kann.

(4.2.1) Sei $g : Y \rightarrow C$ eine minimale Faserung vom Geschlecht 0 über einem Grundkörper k . Nach (3.2.3) ist $N(Y)$ vom Rang 2, und der pseudo-effektive und der pseudo-ample Kegel werden von jeweils *zwei* extremalen Strahlen erzeugt. Ist $c \in C$ ein abgeschlossener Punkt und d die Dimension seines Restkörpers, so hängt die numerische Klasse von $1/d \cdot Y_c$ nicht von der Wahl des Punktes ab, und wird als die *Faserklasse* $F \in N(Y, \mathbb{Q})$ bezeichnet. Nehmen wir der Einfachheit halber an, dass $k = \Gamma(C, \mathcal{O}_C)$ gilt, so ist für jede Kurve $A \subset Y$ die Schnittzahl $A \cdot F$ die generische Länge $\text{long}(A_\eta)$ der Kurve. Der Strahl der Faserklasse erzeugt einen extremalen Strahl des pseudo-effektiven Kegels.

(4.2.2) Sei $e \in N(Y, \mathbb{R})$ der eindeutige Erzeuger des zweiten extremalen Strahls von $\overline{NE}(Y)$ mit $e \cdot F = 1$; sei $a \in N(Y, \mathbb{R})$ der Erzeuger des extremalen Strahls des pseudo-amplen Kegels mit $a \cdot F = 1$, und $q \in N(Y, \mathbb{R})$ das eindeutige Element mit $q^2 = 0$ und $q \cdot F = 1$. Es gilt $e^2 \leq 0$, und dieser Selbstschnitt ist eine fundamentale Invariante der Faserung. Der Selbstschnitt e^2 muss rational sein: Gilt $e^2 < 0$, so gibt es eine irreduzible horizontale Kurve $E \subset Y$ mit $E^2 < 0$ und $(E \cdot F) \cdot e = E$. Jeder Zykel $A \in Z^1(Y)$ besitzt eine numerische Darstellung $A = \lambda e + \mu F$; wegen $A \cdot F = \lambda$ und $A^2 = \lambda^2 e^2 + 2\mu$ müssen die Koeffizienten *rational* sein; folglich ist e selber rational. Die kanonische Klasse besitzt eine Darstellung

$$K_Y = -2e + \alpha F,$$

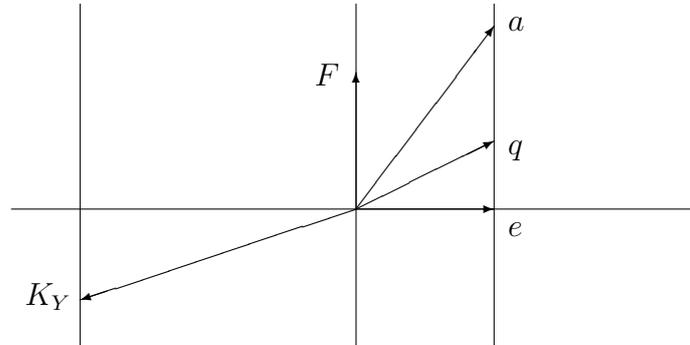
und die rationale Zahl α ist die zweite fundamentale Invariante der Faserung. Weiterhin gilt

$$a = e - e^2 \cdot F \quad \text{und} \quad q = e - e^2/2 \cdot F,$$

und die Selbstschnitte berechnen sich durch

$$K_Y^2 = 4(e^2 - \alpha) \quad \text{und} \quad a^2 = -e^2.$$

Der pseudo-effektive Kegel kann folgendermaßen skizziert werden:



Jedes Element $x \in N(Y, \mathbb{R})$ besitzt eine Darstellung $x = \lambda e + \mu F$, deren Koeffizienten durch die Schnittform und die Invariante e^2 bestimmt sind: es gilt nämlich

$$\lambda = x \cdot F \quad \text{und} \quad \mu = x^2/2\lambda - \lambda e^2/2.$$

Hieraus berechnen sich die pseudo-effektiven und pseudo-ampeln Klassen:

(4.2.3) Lemma. Sei $b \in N(Y, \mathbb{R})$ eine Klasse mit $b \cdot F \neq 0$ und $x = \lambda b + \mu F$.

- (i) Das Element x ist pseudo-effektiv genau dann, wenn $\lambda(b \cdot F) \geq 0$ und $b^2/2(b \cdot F) - e^2/2 + \mu \geq 0$ gelten.
- (ii) Das Element x ist pseudo-ampel genau dann, wenn $\lambda(b \cdot F) \geq 0$ und $\lambda(b \cdot e) + \mu \geq 0$ erfüllt sind.

Die elementare Rechnung sei übergangen. Als Spezialfall halten wir jedoch fest, dass die anti-kanonische Klasse $-K_Y = 2e - \alpha F$ genau dann pseudo-effektiv ist, wenn $\alpha \leq 0$ gilt, und Y del-Pezzo ist genau dann, wenn $\alpha < 2e^2$ gilt.

(4.2.4) Die rationale Klasse $e \in N(Y, \mathbb{R})$ ist nicht notwendigerweise effektiv, lässt sich jedoch durch effektive Klassen approximieren. Sei $m > 0$ eine natürliche Zahl; jede Kurve $A \subset Y$ der generische Länge m lässt sich als $A = me + \lambda F$ mit positiven Koeffizienten schreiben. Unter all diesen Kurven

gibt es eine, für die der Koeffizient $\lambda \geq 0$ minimal ist; sei $\lambda_m = \lambda/m$ und $e_m = e + \lambda_m F$. Dann bilden die e_m eine Folge von effektiven Klasse mit $e_m \cdot F = 1$ mit e als Häufungspunkt. Ist m ein Teiler von n , so gilt $\lambda_n \leq \lambda_m$.

Es gibt Flächen mit $e \neq e_n$ für alle $n > 0$. Sei zum Beispiel C eine glatte Kurve vom Geschlecht $g \geq 2$ über einem Grundkörper von Charakteristik 0. Nach [8, Ex. 10.6, p. 56] gibt es ein \mathcal{O}_C -Vektorbündel \mathcal{E} vom Rang 2 und Grad 0, dessen symmetrische Potenzen $\text{Sym}^n(\mathcal{E})$ stabil sind; sei $X = P(\mathcal{E})$ die entsprechende Regelfläche und D der Divisor zu $\mathcal{O}_X(1)$; Hartshorne zeigt, dass $D \cdot A > 0$ für alle Kurven $A \subset X$ und $D^2 = 0$ gilt. Folglich wird \mathbb{R}_+e von D , nicht aber von einer effektiven Kurve erzeugt.

Über Flächen mit Invariante $\alpha < 0$ lässt sich Folgendes sagen:

(4.2.5) Proposition. *Angenommen, es gilt $e^2 = 0$. Wenn $\alpha < 0$ gilt, dann wird der Strahl \mathbb{R}_+e von einem Divisor $D \subset Y$ erzeugt und definiert eine zweite minimale Faserung $g' : Y \rightarrow C'$ vom Geschlecht 0.*

Es gilt $e^2 = 0$ und $e \cdot K_Y < 0$, also existiert nach (3.3.1) eine zweite Faserung vom Geschlecht 0. Wegen (3.2.3) muss diese Faserung minimal sein. QED.

Entarten wir diesen Fall, so erhalten wir eine Aussage über elliptische Faserungen:

(4.2.6) Proposition. *Angenommen, es gilt $e^2 = 0$ und $\alpha = 0$. Dann gibt es eine Faserung $g' : Y \rightarrow C'$ vom Geschlecht 1 über einer Kurve C' vom Geschlecht 0 genau dann, wenn $h^0(nK_Y) \geq 2$ für eine natürliche Zahl $n < 0$ gilt.*

Der extremale Strahl \mathbb{R}_+e wird von $-K_Y$ erzeugt. Angenommen, die Bedingung ist erfüllt. Sei $E \subset Y$ ein effektiver Repräsentant von nK_Y . Seine irreduziblen Komponenten $E_i \subset E$ erfüllen nach dem Hodge-Index-Theorem $E_i \cdot E_j = 0$ und erzeugen ebenfalls \mathbb{R}_+e . Sei $F \subset E$ der Fixteil, also das Infimum über alle Repräsentanten. Wegen $h^0(nK_Y) \geq 2$ ist $D = E - F$ effektiv und ohne Fixteil. Folglich ist D ein Divisor mit leerem Basisort, und definiert gemäß (1.2.2) die gesuchte zweite Faserung. Angenommen, $g' : Y \rightarrow C'$ ist so eine Faserung. Durch Adjunktion auf die generischen Fasern ergibt sich $K_{Y/C'} = 0$, und K_Y ist das Urbild von $K_{C'}$. QED.

Im Falle $e^2 < 0$ wird der Strahl \mathbb{R}_+e durch eine integrale Kurve $E \subset Y$ erzeugt. Wir erhalten eine Aussage über del-Pezzo-Flächen:

(4.2.7) Proposition. *Angenommen, es gilt $e^2 < 0$. Wenn $\alpha < 0$ gilt, dann existiert eine birationale Kontraktion $f : Y \rightarrow Z$ von $E \subset Y$ zu einer minimalen del-Pezzo-Fläche Z .*

Da $K_Y + ne$ nicht effektiv ist, existiert nach (2.5.3) eine birationale Kontraktion. Wegen $K_Z = f_*(\alpha F)$ erhalten wir eine del-Pezzo-Fläche. QED.

4.3. Mutationen

In diesem Abschnitt studieren wir die Struktur einer Faserung $g : Y \rightarrow C$ vom Geschlecht 0, deren Fasern *irreduzibel* sind. Unser Hauptresultat ist eine *Formel* für die Multiplizitäten der Fasern Y_c und der relativen kanonischen Klasse $K_{Y/C}$. Dieses Resultat ergibt sich, indem die Faserung Y durch einer Folge von Korrespondenzen, die wir als *Mutationen* bezeichnen, mit einer regulären Faserung verglichen wird. Mutationen sind in kanonischer Weise *Kettenbrüche* zugeordnet, deren Zähler und Nenner in unseren Formeln auftauchen.

(4.3.1) In diesem Abschnitt sein C die Lokalisierung einer regulären algebraischen Kurve an einem abgeschlossenen Punkt $c \in C$. Wir betrachten nun Faserungen $g : Y \rightarrow C$ von normalen Flächen über dieser lokalen Kurve, deren generische Faser vom Geschlecht 0 ist.

Nach (5.2.3) lässt sich jede irreduzible Komponente von Y_c kontrahieren; wir bezeichnen die Faserung als *irreduzibel* oder *minimal*, wenn ihre abgeschlossene Faser irreduzibel ist. In diesem Fall wird in kanonischer Weise eine Multiplizität μ durch die Gleichung

$$Y_c = \mu \cdot Y_c^{\text{red}}$$

von Zyklen definiert. Ein Ziel dieses Abschnitts ist die Berechnung dieser Multiplizität. Sei $f : X \rightarrow Y$ die Auflösung der Singularitäten; wie im Beweis von (5.2.1) existiert eine Kontraktion $f' : X \rightarrow Y'$, wobei Y' eine reguläre Fläche mit irreduzibler Faserung, also eine relative Quadrik ist. Der dualisierende Modul $\omega_{X/Y'}$ lässt sich durch einen eindeutigen Zyklus $K_{X/Y'}$ mit exzeptionellen Träger repräsentieren, und es wird in kanonischer Weise eine Multiplizität λ durch die Gleichung

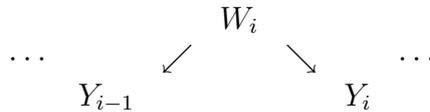
$$f_*(K_{X/Y'}) = \lambda \cdot Y_c^{\text{red}}$$

von Zyklen definiert. Ein weiteres Ziel dieses Abschnitts ist die Berechnung dieser Multiplizität.

(4.3.2) Der Morphismus $f' : X \rightarrow Y'$ faktorisiert in eine Folge von Aufblasungen

$$X = X_n \xrightarrow{h_n} X_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{h_1} X_0 = Y'$$

von abgeschlossenen Punkten $x_i \in X_i$. Sei $E_i = h_i^{-1}(x_{i-1})$ der exzeptionelle Divisor. Da $f : X \rightarrow Y$ die *minimale* Auflösung ist, muss $E_i \subset X_i$ der einzige exzeptionelle Divisor der ersten Art sein, folglich gilt $x_i \in E_i$. Für dieses Zentrum gibt es zwei Alternativen: entweder berührt x_i eine weitere irreduzible Komponente oder liegt im regulären Ort der reduzierten Faser. Im letzteren Fall kann man die übrigen irreduziblen Komponenten kontrahieren, ohne die Aufblasung $X_n \rightarrow X_i$ in der Nähe von x_i zu verändern. Wir können also die Korrespondenz X in eine Folge von Korrespondenzen



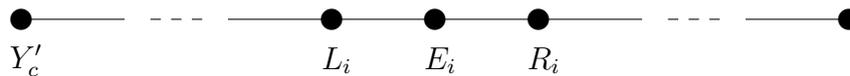
zerlegen so, dass Y_i irreduzibel gefasert ist und jedes Zentrum zu $W_i \rightarrow Y_i$ in zwei irreduziblen Komponenten enthalten ist. Wir bezeichnen die W_i als Mutationen. Etwas formaler ausgedrückt:

(4.3.3) **Definition.** Wir bezeichnen eine Korrespondenz X zwischen zwei irreduziblen Faserungen Y und Y' als Mutation, wenn der Morphismus $X \rightarrow Y'$ eine Folge von Aufblasungen von regulären Punkten ist, der Schnittgraph von X_c ein Baum ohne Verzweigung ist, und die exzeptionelle Kurve der ersten Art $E \subset X_c$ surjektiv auf Y_c abbildet.

Seien L und R Unbestimmte; wir bezeichnen ein Wort $w = L^{l_1} R^{r_1} \dots$ als erlaubt, wenn es nicht mit R beginnt. Mutationen lassen sich folgendermaßen codieren:

(4.3.4) **Proposition.** Eine Mutation X wird in eindeutiger Weise durch das Zentrum $y' \in Y'$ und ein erlaubtes Wort $w = L^{l_1} R^{r_1} \dots$ bestimmt.

Sei X_n, \dots, X_0 die Folge der Aufblasungen. Ist das Wort w leer, so sei X die eindeutige Mutation mit $n = 1$. Gilt $w = L$, so sei X die eindeutige Mutation mit $n = 2$. Ist das Wort länger, so wird die Mutation induktiv definiert: der Schnittgraph der abgeschlossenen Faser von X_i ist eine Kette



mit $i + 1$ Komponenten, wobei die *linke* Ecke die strikt Transformierte von Y'_c und E_i die exzeptionelle Kurve der ersten Art sei. Ist der i -te Buschstabe ein L , so sei $L_i \cap E_i$, andernfalls $E_i \cap R_i$ das nächste Zentrum. QED.

In (4.5.3) wird beschrieben, wie einem Wort w eine gekürzte rationale Zahl $p/q > 0$ zugeordnet wird. Mit diesem Bruch lässt sich die Veränderung der Fasermultiplizität bestimmen:

(4.3.5) Proposition. *Sei X eine Mutation zu einem erlaubten Wort w und p/q die entsprechende rationale Zahl. Ist μ' die Multiplizität von Y'_c , so ist $\mu = p \cdot \mu'$ die Multiplizität von Y_c .*

Sei X_n, \dots, X_0 die Folge der Aufblasungen. Der Schnittgraph der abgeschlossenen Faser $F_i \subset X_i$ hat die Form



wobei die linke Ecke die strikt Transformierte von Y'_c und $A_i \cap B_i$ das nächste Zentrum sei. Seien a_i, b_i die Multiplizitäten von $A_i, B_i \subset F_i$. Offenbar gilt $\mu = a_{n-1} + b_{n-1}$; wir berechnen daher induktiv die Paare (a_i, b_i) . Für $i = 1$ gilt $a_1 = b_1 = \mu'$. Ist $X_{i+1} \rightarrow X_i$ durch den Buchstaben L definiert, ergibt sich

$$(a_i, b_i) = (a_{i-1}, a_{i-1} + b_{i-1}) = (a_{i-1}, a_{i-1}) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

andernfalls

$$(a_i, b_i) = (a_{i-1} + b_{i-1}, a_{i-1}) = (a_{i-1}, a_{i-1}) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Setzen wir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{l_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{l_2} \cdots,$$

so ist $p/q = (a + b)/(c + d)$ der assoziierte Bruch zum erlaubten Wort w , und wir erhalten $\mu = a_{n-1} + b_{n-1} = (a + b)\mu'$. QED.

Auf ähnliche Weise lässt sich die Multiplizität der kanonischen Klasse berechnen:

(4.3.6) Proposition. *Sei X eine Mutation zu einem erlaubten Wort w und p/q die entsprechende rationale Zahl. Dann ist $p+q-1$ die Multiplizität von $f_*(K_{X/Y'})$.*

Wir verwenden die gleiche Notation wie im Beweis von (4.3.5). Seien a_i, b_i die Multiplizitäten von $K_{X_i/Y'}$ in A_i, B_i . Nach der Adjunktionsformel ist $a_i + b_i + 1$ die Multiplizität von der exzeptionellen Kurve $E_{i+1} \subset X_{i+1}$ in $K_{X_{i+1}/Y'}$. Der Trick ist nun, die Paare $(a_i + 1, b_i + 1)$ wie oben induktiv zu berechnen. Es gilt $(a_1 + 1, b_1 + 1) = (1, 2)$, und wir erhalten $a_{n-1} + 1 = a + c$ und $b_{n-1} + 1 = b + d$. Also ist

$$a_{n-1} + b_{n-1} + 1 = a + c + b + d - 1 = p + q - 1$$

die gesuchte Multiplizität. QED.

(4.3.7) Wir berechnen nun die Schnitzzahlen, die bei einer Mutation X zu einem erlaubten Wort w auftreten. Sei X_i die entsprechende Folge von Aufblasungen und A_{i1}, \dots, A_{i,m_i} die integren Komponenten der abgeschlossenen Faser von X_i links der exzeptionellen Kurve der ersten Art. Wir wollen nun die Folge der Selbstschnitte $s_{ij} = -A_{ij}^2$ berechnen. Offenbar gilt $s_{11} = 1$ und $s_{21} = 2$. Ist $X_i \rightarrow X_{i-1}$ durch den Buchstaben L definiert, so gilt $m_i = m_{i-1}$ und

$$(s_{i,1}, \dots, s_{i,m_i}) = (s_{i-1,1}, \dots, s_{i-1,m_{i-1}} + 1);$$

anderfalls erhalten wir $m_i = m_{i-1} + 1$ und

$$(s_{i,1}, \dots, s_{i,m_i}) = (s_{i-1,1}, \dots, s_{i-1,m_{i-1}}, 2).$$

Ist p/q die rationale Zahl zum Wort w und $s_i = s_{in}$, so ergeben sich diese Selbstschnitte aus dem Kettenbruch $p/q = [s_1, s_2, \dots]$, und die Folge (s_1, s_2, \dots) stimmt mit der Folge

$$l_1 + 1 \underbrace{2, \dots, 2}_{r_1}, l_2 + 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{r_2}, l_3 + 1, \underbrace{2, \dots, 2}_{r_3}, \dots$$

überein, vergleiche (4.5.3).

(4.3.8) Wir schließen diesen Absatz mit einer Rechnung, die später nützlich sein wird. Sei X eine Mutation zum erlaubten Wort w und $A_i \subset X_c$ die integren Komponenten links neben der exzeptionellen Kurve der ersten Art.

Die Schnittform auf dem von ihnen erzeugten Modul ist negativ definit, also gibt es eine rationale Lösung $\sum \lambda_j A_j$ des Gleichungssystems

$$A_i \cdot \sum \lambda_j A_j = \delta_{i,1}, \quad i = 1, \dots, m.$$

Setzen wir $\lambda_0 = -1$ und $\lambda_{n+1} = 0$, so können wir dies als

$$\lambda_{i-1} - s_i \lambda_i + \lambda_{i+1} = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

schreiben, und erhalten induktiv $-\lambda_1^{-1} = \lambda_0/\lambda_1 = [s_1, s_2, \dots]$. Ist p/q der Bruch zum Wort w , so berechnet sich der Koeffizienten der strikt transformierten von Y'_c durch $\lambda_1 = -q/p$.

4.4. Minimale del-Pezzo-Flächen

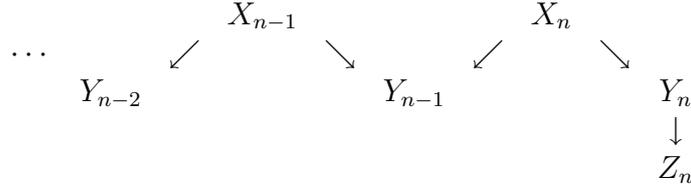
In diesem Abschnitt kommen wir zu dem zentralen Ergebnis dieses Kapitels, nämlich der Klassifikation von minimalen del-Pezzo-Flächen, die ein gutes Bündel erlauben, vergleiche (4.4.1). Wir konstruieren zu so einer Fläche Z eine Folge Z_0, \dots, Z_n von del-Pezzo-Flächen, die sich aus Mutationen ergeben, wobei Z_0 die Kontraktion eines P^1 -Bündels und $Z_n = Z$ ist. Unser Ergebnis verallgemeinert ein Resultat von Fujisawa [5], der die sogenannten DP1-Flächen klassifiziert hat. Schließlich untersuchen wir, unter welchen Umständen eine minimale del-Pezzo-Fläche ein gutes Bündel enthält; dies ist der Fall, wenn der Grundkörper von Charakteristik 0 ist und die Fläche Z mindestens eine nicht-rationale Singularität enthält.

(4.4.1) Sei Z eine minimale del-Pezzo-Fläche und $X \rightarrow Z$ die minimale Auflösung der Singularitäten. Wir sagen, dass Z ein *gutes Bündel* besitzt, wenn es eine Faserung $X \rightarrow C$ vom Geschlecht 0 gibt so, dass die exzeptionelle Kurve $R \subset X$ über C generisch ein Schnitt ist; mit anderen Worten, der horizontale Anteil $R_h \subset R$ ist ein Schnitt der Faserung. Nach (5.2.3) lassen sich die vertikalen Komponenten von R kontrahieren, und wir erhalten eine Faktorisierung $Y \rightarrow Z$; da $N(Z)$ vom Rang 1 ist, muss die Faserung auf Y irreduzibel sein (3.2.3). Wir benutzen nun Mutationen, um minimale del-Pezzo-Flächen mit einem guten Bündel zu klassifizieren.

(4.4.2) Kontrahieren wir sukzessive die exzeptionellen Kurve der ersten Art in den Fasern von $X \rightarrow C$, so erhalten wir eine Faktorisierung über eine relative Quadrik $Q \rightarrow C$. Da Q regulär ist, sind die Fasern ein P^1 oder eine

reduzible Quadrik. Das Bild von R kann als Schnitt der Faserung nur jeweils eine Komponente einer Faser Q_c schneiden, also können wir die Quadrik zu einem P^1 -Bündel $P \rightarrow C$ kontrahieren so, dass die Verkettung $X \rightarrow P$ in der Nähe von R ein lokaler Isomorphismus ist.

Wir zerlegen die Korrespondenz X in eine Folge X_1, \dots, X_n von Mutationen zwischen irreduziblen Faserungen Y_0, \dots, Y_n . Es ergibt sich ein Diagramm



mit $Y_n = Y$, $Z_n = Z$, und $Y_0 = P$. Sei $R_i \subset Y_i$ die strikt Transformierte von R . Wir können diese Folge Y_i der Faserungen zu einer Folge von del-Pezzo-Flächen Z_i erweitern:

(4.4.3) Theorem. *Auf jeder Faserung Y_i lässt sich die strikt Transformierte R_i zu einer minimalen del-Pezzo-Fläche Z_i kontrahieren.*

Wir beweisen diese Aussage durch absteigende Induktion nach i . Nach Konstruktion ist die Aufblasung $X_i \rightarrow Y_i$ an $R_i \subset Y_i$ ein lokaler Isomorphismus, also gilt $R_i^2 \leq R_{i+1}^2 < 0$. Schreiben wir

$$K_{Y_i} = -2R_i + \lambda_i F,$$

wobei F die Faserklasse und λ_i eine rationale Zahl ist. Wegen

$$K_{Y_{i+1}} = -2R_{i+1} + \lambda_{i+1} F + h_*(K_{X_i/Y_i})$$

folgt $\lambda_i \leq \lambda_{i+1} < 0$ aus der Formel (4.3.6). Nach (4.2.7) existiert die gesuchte Kontraktion $Y_i \rightarrow Z_i$ von R_i . QED.

(4.4.4) Theorem. *Sei Y' eine irreduzible Faserung vom Geschlecht 0 über einer Kurve C vom Geschlecht $h^1(\mathcal{O}_C) > 0$ so, dass eine Kontraktion eines Schnittes $R' \subset Y'$ zu einer del-Pezzo-Fläche Z' existiert. Sei $c \in C$ ein abgeschlossener Punkt, $y' \in Y' \setminus R'$ ein regulärer abgeschlossener Punkt über c , und Y ein Mutation von Y' mit Zentrum y' . Dann gibt es eine Kontraktion Y von R zu einer del-Pezzo-Fläche Z genau dann, wenn*

$$\mu' + d \cdot \frac{p+q-1}{p} \cdot \frac{1}{m} < 0$$

erfüllt ist; hierbei ist p/q die rationale Zahl zum Wort w der Mutation, m die Multiplizität der Faser Y'_c , d die Dimension des Restekörpers $\kappa(c)$, und μ' der Koeffizient in $K_{Y'} = -2R' + \mu'F$.

Gemäss (4.2.7) reicht es zu zeigen, dass R^2 und der Koeffizient μ in $K_Y = -2R + \mu F$ strikt negativ sind. Sei $f : X \rightarrow Y$ die Mutation; dann gilt

$$K_Y = -2R + \mu'F + f_*(K_{X/Y'}),$$

und gemäß (4.3.6) und unserer Voraussetzung folgt

$$\mu = \mu' + d \cdot \frac{p+q-1}{p} \cdot \frac{1}{m} < 0.$$

Um den Selbstschnitt R^2 zu berechnen, betrachten wir die strikt transformierte $A \subset X$ der Reduktion von $Y'_{g(y)}$. Es gilt $R' \cdot A = d/m$ und $f^*(R) = R' + \lambda A + \dots$ für eine positiven Koeffizienten λ ; mit $l = \dim \kappa(y)$ und (4.3.8) erhalten wir

$$\lambda = q/p \cdot (R' \cdot A) \cdot 1/l,$$

also

$$R^2 = R' \cdot f^*(R) = (R')^2 + \lambda(R' \cdot A) = (R')^2 + qd^2/plm^2.$$

Die Schnittzahl hat sich also vergrößert. Angenommen, Y' ist ein P^1 -Bündel; dann gilt $\mu' = (R')^2 + K_C$, also $(R')^2 \leq \mu'$. Im allgemeinen Fall können wir Y' durch eine Folge von Mutationen mit einem P^1 -Bündel vergleichen; benutzen wir die Abschätzung

$$\frac{qd^2}{plm^2} \leq \frac{q}{p} \cdot \frac{d}{m} \leq \frac{p+q-1}{p} \cdot \frac{d}{m},$$

so erhalten wir induktiv $(R')^2 \leq \mu'$. Demnach gilt $R^2 \leq \mu < 0$, und die gesuchte Kontraktion existiert. QED.

Es bleibt zu klären, unter welchen Umständen eine minimale del-Pezzo-Fläche Y ein gutes Büschel besitzt. Es liegen zwei Teilprobleme vor: Besitzt die minimale Auflösung X eine Faserung $g : X \rightarrow C$ vom Geschlecht 0? Ist der exzeptionelle Divisor $R \subset X$ generisch ein Schnitt? Wir betrachten zunächst die Situation über einem abgeschlossenen Körper:

(4.4.5) Proposition. *Angenommen, der Grundkörper k ist algebraisch abgeschlossen. Wenn Y eine Singularität enthält, dann besitzt die Auflösung X eine Faserung vom Geschlecht 0.*

Nach [14] erlaubt X eine solche Faserung oder ist birational zum P^2 ; im letzteren Fall ist sein minimales Modell eine Hirzebruchfläche oder der P^2 ; wegen $\rho(X) > 1$ faktorisiert X über eine Hirzebruchfläche. QED.

Verschärfen wir die Voraussetzungen an die Singularitäten, können wir einen *Galois-Abstieg* durchführen:

(4.4.6) Proposition. *Angenommen, der Grundkörper k ist perfekt. Wenn Y eine nicht-rationale Singularität enthält, dann besitzt die Auflösung X eine Faserung vom Geschlecht 0.*

Sei $k \subset k'$ der algebraische Abschluss, $Y' = Y \otimes k'$, und $X' = X \otimes k'$. Die Galois-Gruppe G operiert auf X' mit Quotientem X . Wegen der exakten Sequenz

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(Y, R^1 f_*(\mathcal{O}_X)) \longrightarrow H^2(Y, \mathcal{O}_Y)$$

muss $H^1(\mathcal{O}_C) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_R)$ surjektiv sein, und C ist eine Kurve vom Geschlecht $g > 0$. Nach der Riemann-Hurwitz-Formel kann keine horizontale Kurve $A' \subset X'$ vom Geschlecht 0 sein. Also muss jede Faser X'_c von der Galois-Gruppe auf eine andere Faser abgebildet werden, und ein Divisor $D' \subset X'$, der die Faserung definiert, ist invariant. Folglich existiert eine Faserung $g : X \rightarrow C$ vom Geschlecht 0. QED.

(4.4.7) Korollar. *Voraussetzung wie in (4.4.6). Dann ist die Projektion $R \rightarrow C$ generisch radikal. Insbesondere besitzt Y genau eine nicht-rationale Singularität.*

Seien $R_i \subset R$ die horizontalen Komponenten. Nach der Formel von Riemann-Hurwitz gilt $h^1(\mathcal{O}_{R_i}) \geq h^1(\mathcal{O}_C)$, mit Gleichheit genau dann, wenn die Projektion $R_i \rightarrow C_i$ radikal ist. Da $H^1(\mathcal{O}_C) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_R)$ surjektiv ist, kann es nur eine horizontale Komponente R_i geben. QED.

Verbieten wir radikale Morphismen, erhalten wir folgendes Resultat:

(4.4.8) Theorem. *Angenommen, der Grundkörper k ist von Charakteristik 0. Wenn Y eine nicht-rationale Singularität enthält, dann gibt es ein gutes*

Büschel; mit anderen Worten, die minimale Auflösung X besitzt eine Faserung $g : X \rightarrow C$ vom Geschlecht 0 und die Projektion des exceptionellen Divisors $R \rightarrow C$ ist generisch ein Schnitt.

Nach (4.4.7) ist $R \rightarrow C$ generisch radikal, also generisch ein Isomorphismus. QED.

4.5. Bemerkungen über Kettenbrüche

In diesem Abschnitt stellen wir ohne Beweise einige Tatsachen über Kettenbrüche zusammen, die in diesem Kapitel benutzt worden sind.

(4.5.1) Wir betrachten die folgenden vier Menge: Sei \mathbb{Q}_+^\times die Menge der nicht-negativen rationalen Zahlen, $\mathrm{SL}(2, \mathbb{N})$ die Menge der 2×2 -Matrizen mit natürlichen Einträgen und Determinante 1, und S die Menge aller endlichen Folgen (s_1, \dots, s_n) natürlicher Zahlen mit $n > 0$, $s_1 > 0$, und $s_i > 1$ für $i > 1$; schließlich sein M der freie Monoid, der von den Buchstaben L und R erzeugt wird. Wie wir sehen werden, sind diese vier Mengen in kanonischer Weise isomorph und besitzen in kanonischer Weise die Struktur eines Monoiden.

(4.5.2) Es ist wohlbekannt, dass jeder Bruch $p/q > 0$ eine eindeutige Kettenbruchentwicklung

$$\frac{p}{q} = [s_1, \dots, s_n] = s_1 - \frac{1}{s_2 - \frac{1}{\dots}}$$

mit $(s_1, \dots, s_n) \in S$ besitzt. Diese Zuordnung liefert also eine Bijektion $S \rightarrow \mathbb{Q}_+^\times$. Ordnet man einer Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ den Bruch $p/q = (a+b)/(c+d)$ zu, so ergibt sich eine Bijektion $\mathrm{SL}(2, \mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{Q}_+^\times$, wie man leicht nachrechnet. Der Monoid $\mathrm{SL}(2, \mathbb{N})$ wird von den beiden Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ frei erzeugt; bilden wir den Buchstaben L auf die linke Matrix und R auf die rechte Matrix ab, so erhalten wir eine Bijektion von Monoiden $M \rightarrow \mathrm{SL}(2, \mathbb{N})$. Die Menge S wird durch die Verknüpfung

$$(s_1, \dots, s_m) \circ (t_1, \dots, t_n) = (s_1, \dots, s_{m-1}, s_m + t_1 - 1, t_2, \dots, t_n)$$

zu einem Monoiden. Wie man leicht nachrechnet, wird er von den Folgen (2) und (1, 2) frei erzeugt. Die Zuordnung $L \mapsto (2)$ und $R \mapsto (1, 2)$ liefert also eine Bijektion $M \rightarrow S$ von Monoiden.

(4.5.3) **Proposition.** *Das Diagramm*

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \mathrm{SL}(2, \mathbb{N}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \longrightarrow & \mathbb{Q}_+^\times \end{array}$$

der obigen Abbildungen ist kommutativ.

Zum Beispiel entspricht L der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und dem Bruch $2 = 2/1$, während der Buchstabe R der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und dem Bruch $1/2 = 1 - 1/2$ liefert. Wir überlassen den induktiven Beweis dem Leser. QED.

5. Relative Kurven

Sei Z ein noethersches Schema. Unter einer *relativen Kurve* verstehen wir einen Morphismus $f : X \rightarrow Z$ vom endlichen Typ, der nicht endlich ist und dessen Fasern höchstens 1-dimensional sind. Eine relative Kurve über einer noetherschen Basiskurve bezeichnen wir auch als *gefaserte Fläche*. In diesem Kapitel untersuchen wir die Struktur von relativen Kurven mit Hilfe von Kontraktionen.

Im ersten Abschnitt zeigen wir, dass eigentliche relative Kurven über einer henselschen Basis projektiv sind und alle Kontraktionen existieren. Im zweiten Abschnitt studieren wir gefaserte Flächen, für die $R^1 f_*(\mathcal{O}_X)$ torsion ist; wir zeigen, dass unter günstigen Umständen die Resultate von der Henselisierung absteigen. Im dritten Abschnitt konstruieren wir mit dem Satz von Mordell-Weil ein Beispiel für die Nicht-Existenz von Kontraktionen. Im letzten Abschnitt charakterisieren wir die affinen offenen Teilmengen und kontrahierbaren Kurven einer gefaserten Fläche durch ihre Komplemente.

5.1. Henselsche Basisschemata

(5.1.1) Relative Kurven werden durch diskrete Divisoren geliefert: Ist $g : W \rightarrow Z$ ein eigentlicher Morphismus und $D \subset W$ ein Divisor, dessen Fasern diskret sind, so ist $\mathcal{L} = \mathcal{O}_W(D)$ nach (1.2.2) ein kontraktiver Modul, und das homogene Spektrum X von $g_*(\text{Sym } \mathcal{L})$ ist eine projektive relative Kurve. Die Existenz solcher Divisoren hängt stark von dem Basisschema Z ab. Wir betrachten im Folgenden den Fall, dass Z ein *henselsches* noethersches Schema mit abgeschlossenem Punkt $\sigma \in Z$ ist, und untersuchen eigentliche relative Kurven $f : X \rightarrow Z$.

(5.1.2) Proposition. *Sei $X_\sigma = X_1 \cup X_2$ eine abgeschlossene Überdeckung mit höchstens 0-dimensionalem Durchschnitt $X_1 \cap X_2$. Dann gibt es einen effektiven Divisor $D \subset X$, der auf X_1 ampel ist und zu X_2 disjunkt ist.*

Da die abgeschlossene Faser eine Kurve ist, findet sich ein ample Divisor $D_1 \subset X_1$, der zu X_2 und zur Vereinigung der Abschlüsse der Punkte $x \in \text{Ass}(\mathcal{O}_X)$ mit $\overline{\{x\}} \cap X_1$ diskret disjunkt ist. Da die Basis henselsch ist, findet sich nach [EGA IV, 21.9.11] ein Divisor $D \subset X$ mit $D \cap X_\sigma = D_1$. QED.

Setzen wir $X_1 = X_\sigma$, so liefert dieser Divisor einen ample invertierbaren \mathcal{O}_X -Modul. Im allgemeinen erhalten wir Kontraktionen:

(5.1.3) Korollar. *Voraussetzung wie in (5.1.2). Dann gibt es eine Kontraktion $h : X \rightarrow Y$, die für einen Punkt $z \in Z$ genau die irreduziblen Kurven $R \subset X_z$ kontrahiert, deren Spezialisierung $\overline{R} \cap X_\sigma$ in X_2 enthalten ist.*

Der invertierbare Modul $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ liefert eine Kontraktion $h : X \rightarrow Y$. Nach dem Satz von Chevalley [EGA IV, 13.1.4] enthält die Spezialisierung keine isolierten Punkte. Folglich ist D disjunkt zu R genau dann, wenn die Spezialisierung in X_2 enthalten ist. QED.

(5.1.4) Bemerkung. Ist $X_2 \subset X_\sigma$ eine abgeschlossene Kurve so, dass für jeden nicht-abgeschlossenen Punkt $z \in Z$ und jede Kurve $C \subset X_z$ die Spezialisierung $\overline{C} \cap X_\sigma$ nicht ganz in X_2 enthalten ist, so ist $R = X_2$ die *einzigste* Kurve, die von $h : X \rightarrow Y$ kontrahiert wird.

Aus dem obigen Resultat ergibt sich eine relative Form des Einbettungssatzes von Nagata:

(5.1.5) Proposition. *Sei $g : U \rightarrow Z$ eine separierte relative Kurve. Wenn für jeden Punkt $z \in Z$ und jede irreduzible Kurve $C \subset U_z$ die Spezialisierung $C \cap U_\sigma$ nicht-leer ist, dann gibt es eine Faktorisierung*

$$U \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Z$$

so, dass $f : X \rightarrow Z$ eine projektive relative Kurve und $i : U \rightarrow X$ eine offene Einbettung ist, deren Komplement $X \setminus U$ faserweise diskret ist.

Nach dem Satz von Lütkebohmert-Nagata [15] gibt es eine Faktorisierung

$$U \xrightarrow{j} W \xrightarrow{g} Z$$

so, dass $U \subset W$ eine offene dichte Einbettung und $W \rightarrow Z$ ein eigentlicher Morphismus ist. Sei $D_\sigma \subset U_\sigma$ ein ample Divisor, der disjunkt zur Vereinigung der Abschlüsse der Punkte $x \in \text{Ass}(\mathcal{O}_X)$ mit $\overline{\{x\}} \cap U_\sigma$ diskret ist; da die Basis henselsch ist, existiert nach [EGA IV, 21.9.11] ein Divisor $D \subset X$ mit $D \cap X_\sigma = D_\sigma$. Sei

$$W \xrightarrow{h} X \xrightarrow{f} Z$$

die entsprechende Kontraktion. Da D diskrete Fasern hat, ist X eine projektive relative Kurve. Zeigen wir, dass die Verkettung $i = h \circ j$ unser Problem löst. Angenommen, es gibt es einen Punkt $z \in Z$ und zwei verschiedene

Punkte $u \in U_z$ und $w \in W_z$ mit gleichem Bild $x \in X$. Da die Fasern von h zusammenhängend sind, gibt es eine Kurve $C \subset W_z$ durch diese beiden Punkte, die ebenfalls auf x abgebildet wird. Ersetzen wir die Punkte geeignet, so können wir annehmen, dass die Kurve C irreduzibel ist. Nach Konstruktion ist $C \cap D$ nicht-leer, folglich kann $g(D)$ nicht diskret sein, Widerspruch. Also ist die Abbildung $i : U \rightarrow X$ injektiv und X die disjunkte Vereinigung von $V = i(U)$ und $h(W \setminus U)$. Somit ist V eine offene Teilmenge und U ihr Urbild; da $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_W$ bijektiv ist, muss $i : U \rightarrow X$ eine offene Einbettung sein. Da D disjunkt zum Komplement $W \setminus U$ ist, muss $X \setminus U$ diskrete Fasern haben. QED.

(5.1.6) Betrachten wir nun den Fall, dass Z ein lokales, nicht notwendigerweise henselsches Schema ist. Ist $Z^h \rightarrow Z$ die Henselisierung und $X^h = X \times_Z Z^h$, so muss die induzierte relative Kurve $f^h : X^h \rightarrow Z^h$ projektiv sein und alle Kontraktionen erlauben. Die Existenz eines ample \mathcal{O}_X -Moduls oder einer Kontraktion von X kann also als *Abstiegsproblem* von der Henselisierung X^h verstanden werden.

5.2. Kurven vom Geschlecht 0

In diesem Abschnitt untersuchen wir die einfachsten gefaserten Flächen, nämlich solche vom Geschlecht 0, und untersuchen, ob sich das Abstiegsproblem von der Henselisierung lösen lässt. Wir verwenden folgende Notation: Sei Z eine lokale noethersche Kurve mit abgeschlossenem Punkt $\sigma \in Z$ und $f : X \rightarrow Z$ eine eigentliche relative Kurve vom Geschlecht 0; mit anderen Worten, $R^1 f_*(\mathcal{O}_X)$ soll ein Torsionsmodul sein. Wir betrachten zunächst den Spezialfall von *normalen* und *auflösbaren* Flächen:

(5.2.1) Proposition. *Wenn X normal ist und eine Auflösung der Singularitäten besitzt, dann verschwindet $R^1 f_*(\mathcal{O}_X)$.*

Mit anderen Worten, der Morphismus $f : X \rightarrow Z$ ist kohomologisch flach [EGA III, 7.8]. Eine Auflösung $g : W \rightarrow X$ existiert genau dann, wenn die Kompletterungen der lokalen Ringe $\mathcal{O}_{X,x}$ normal sind [12]. Aus der Inklusion

$$0 \longrightarrow H^1(X, g_*(\mathcal{O}_W)) \longrightarrow H^1(W, \mathcal{O}_W)$$

entnehmen wir, dass wir nur den Fall X regulär behandeln müssen. Angenommen, X_σ ist nicht irreduzibel; dann gibt es eine irreduzible Komponente

$R \subset X_\sigma$ mit $R \cdot K_X < 0$ und $R^2 < 0$; nach dem Castelnuovo-Kriterium [4] existiert eine Kontraktion $g : X \rightarrow Y$ von R mit $R^1 g_*(\mathcal{O}_X) = 0$ und Y regulär. Wegen der exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow H^1(X, g_*(\mathcal{O}_X)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(Y, R^1 g_*(\mathcal{O}_X))$$

können wir zusätzlich annehmen, dass X_σ irreduzibel ist. Angenommen, es gibt einen Divisor D und eine natürliche Zahl $n > 0$ mit $X_\sigma = nD$. Wir erhalten

$$-2n \cdot \chi(\mathcal{O}_D) = nD \cdot K_X = X_\sigma \cdot K_X = \chi(\mathcal{O}_{X_\sigma});$$

aus $\chi(\mathcal{O}_{X_\sigma}) \neq 0$ folgt $n = 1$, und die abgeschlossene Faser ist sogar integer. Wegen

$$\deg(\omega_{X_\sigma}) = X_\sigma^2 + X_\sigma \cdot K_X < 0$$

verschwindet $H^1(X_\sigma, \mathcal{O}_{X_\sigma}) = H^0(X_\sigma, \omega_{X_\sigma})$, folglich auch $H^1(X, \mathcal{O}_X)$. QED.

(5.2.2) Korollar. *Voraussetzungen wie in (5.2.1). Dann sind die Singularitäten von X rational und \mathbb{Q} -faktoriell, und es gibt einen amplen invertierbaren \mathcal{O}_X -Modul.*

Sei $g : W \rightarrow X$ eine Auflösung und \mathcal{L} ein invertierbarer \mathcal{O}_W -Modul, der auf dem exzeptionellem Divisor $R \subset X$ numerisch trivial und auf den übrigen irreduziblen Komponenten ampel ist. Ist W^\wedge die Komplettierung von $R \subset W$, so gilt $H^1(W, \mathcal{O}_{W^\wedge}) = 0$, und die Einschränkung $\mathcal{L} | W^\wedge$ ist trivial. Somit definiert \mathcal{L} den gesuchten amplen invertierbaren \mathcal{O}_X -Modul. Ebenso zeigt man, dass rationale Singularitäten \mathbb{Q} -faktoriell sind. QED.

(5.2.3) Korollar. *Voraussetzungen wie in (5.2.1). Dann lässt sich jede irreduzible Komponente $R \subset X_\sigma$ kontrahieren.*

Wegen der \mathbb{Q} -Faktorialität findet sich ein invertierbarer \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{L} , der auf R numerisch trivial und auf den übrigen Komponenten ampel ist. Ist \mathfrak{X} die Komplettierung von $R \subset X$, so gilt $H^1(X, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}}) = 0$, und die Einschränkung $\mathcal{L} | \mathfrak{X}$ ist trivial. Über der Henselisierung von Z existiert die gesuchte Kontraktion und wird von dem Urbild von \mathcal{L} definiert. Wegen *fpqc*-Abstieg ist \mathcal{L} kontraktiv, und das homogene Spektrum von $\Gamma(X, \text{Sym } \mathcal{L})$ liefert die gesuchte Kontraktion. QED.

Sei $Z^h \rightarrow Z$ die Henselisierung, $X^h = X \times_Z Z^h$, und $f^h : X^h \rightarrow Z^h$ die induzierte gefaserte Fläche. Wenn X und Z normal und irreduzibel sind, dann

gilt dies auch für X^h und Z^h . Unsere obigen Resultate sind also Spezialfälle von folgendem Ergebnis:

(5.2.4) Theorem. *Sei \mathfrak{X} die Komplettierung bezüglich der abgeschlossenen Faser $X_\sigma \subset X$, und $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \cup \mathfrak{X}_2$ eine abgeschlossene Überdeckung mit höchstens 0-dimensionalem Durchschnitt. Wenn $X^h \rightarrow X$ eine Bijektion von irreduziblen Komponenten ist, dann gibt es einen invertierbaren \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{L} , der auf \mathfrak{X}_1 ample und auf \mathfrak{X}_2 trivial ist.*

Sei A der lokale Ring von Z und $A^h = \varinjlim(A_\alpha)$ seine Henselisierung, wobei A_α die strikt essentiell étalen A -Algebren sind. Mit $Z_\alpha = \text{Spec}(A_\alpha)$ und $X_\alpha = X \times_Z Z_\alpha$ erhalten wir cartesische Quadrate

$$\begin{array}{ccccc} X^h & \longrightarrow & X_\alpha & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Z^h & \longrightarrow & Z_\alpha & \longrightarrow & Z. \end{array}$$

Nach (5.1.2) gibt es einen invertierbaren \mathcal{O}_{X^h} -Modul \mathcal{L}^h , der unser Problem über der Henselisierung löst. Nach [EGA IV, 8.5.2] und [EGA IV, 8.5.5] gibt es einen Index α und ein invertierbarer \mathcal{O}_{X_α} -Modul \mathcal{L}_α , der \mathcal{L}^h induziert, also unser Problem auf X_α löst. Sei A' eine étale A -Algebra mit einem maximalem Ideal $\mathfrak{m} \subset A'$ mit $\mathfrak{m} \cap A = \mathfrak{m}_A$ und $A_\alpha = A'_\mathfrak{m}$. Setzen wir $Z' = \text{Spec}(B)$ und $X' = X \times_Z Z'$; ohne Einschränkung sei Z' zusammenhängend. Die étale Überlagerung $Z' \rightarrow Z$ entspricht somit einer stetigen, transitiven Wirkung der algebraischen Fundamentalgruppe $G = \pi_1(Z)$. Da Z eine Kurve ist, können wir $Z_\alpha \subset Z'$ als eine offene Teilmenge auffassen, und erhalten durch die Wirkung der Fundamentalgruppe eine offene Überdeckung $Z' = \cup g(Z_\alpha)$ für die Elemente $g \in G$. Auf diesen offenen Teilmengen erhalten wir invertierbare Moduln $g^*(\mathcal{L}_\alpha)$. Sei $R = \prod \mathcal{O}_{Z,\eta}$ der Ring der rationalen Funktionen von Z ; da $H^1(X_R, \mathcal{O}_{X_R})$ verschwindet und $X^h \rightarrow X$ eine Bijektion von irreduziblen Komponenten ist, muss die G -Wirkung auf $\text{Pic}(X'_R)$ trivial sein. Folglich verheften sich die invertierbaren Moduln $g^*(\mathcal{L}_\alpha)$ zu einem invertierbaren $\mathcal{O}_{X'}$ -Modul \mathcal{L}' . Da $X' \rightarrow X$ lokal frei ist, gibt es einen Norm-Homomorphismus $\text{Pic}(X') \rightarrow \text{Pic}(X)$, und $\mathcal{L} = N_{X'/X}(\mathcal{L}')$ löst unser Problem. QED.

Im Spezialfall $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1$ erhalten wir einen amplen invertierbaren \mathcal{O}_X -Modul. Wir können auch alle Kontraktionen, die über der Henselisierung existieren, absteigen lassen:

(5.2.5) Korollar. *Voraussetzungen wie in (5.2.4). Sei $X_\sigma = X_1 \cup X_2$ eine abgeschlossene Überdeckung mit höchstens 0-dimensionalem Durchschnitt. Wenn für jede integrale Kurve $C \subset X_\eta$ die Spezialisierung $C \cap X_\sigma$ nicht ganz in X_2 enthalten ist, dann existiert eine Kontraktion $f : X \rightarrow Y$ von X_2 .*

Sei \mathfrak{X}_i die Kompletterung von $X_i \subset X$ und \mathcal{L} wie in (5.2.4) Nach (5.1.3) Existiert die Kontraktion $X^h \rightarrow Y^h$ über der Henselisierung $X^h \rightarrow Z^h$; der induzierte invertierbare \mathcal{O}_{X^h} -Modul \mathcal{L}^h wird von einem invertierbaren \mathcal{O}_{Y^h} -Modul induziert, ist also kontraktiv. Mittels *fpqc*-Abstieg muss \mathcal{L} bereits kontraktiv sein. QED.

5.3. Nicht-Existenz von Kontraktionen

In diesem Abschnitt zeigen wir durch ein Beispiel, dass Kontraktionen von gefaserten Flächen häufig *nicht* existieren. Wir konstruieren ebenfalls eine eigentliche normale algebraische Fläche, die nicht projektiv ist.

Wir benutzen folgende Notation: Sei Z das Spektrum eines diskreten Bewertungsringes A mit Quotientenkörper K , und $\sigma \in Z$ der abgeschlossene, $\eta \in Z$ der generische Punkt. Wir fixieren eine eigentliche, integrale, gefaserte Fläche $X \rightarrow Z$.

(5.3.1) Wegen $A = \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ sind die Fasern von Y zusammenhängend. Sei $y \in Y_\sigma$ ein abgeschlossener Punkt mit zusammenhängendem Komplement und $f : X \rightarrow Y$ die Aufblasung dieses Punktes. Wir erhalten eine abgeschlossene Überdeckung

$$X_\sigma = X_1 \cup X_2,$$

wobei X_1 das Urbild von y und X_2 die Vereinigung der übrigen irreduziblen Komponenten ist. Der Morphismus h kontrahiert also die Kurve X_1 zum Punkt y . Wir stellen uns nun die Frage: *Existiert ein Kontraktion $h' : X \rightarrow Y'$ von X_2 ?*

(5.3.2) Angenommen, es gibt so eine Kontraktion $f' : X \rightarrow Y'$ von X_2 . Sei $U' \subset Y'$ eine affine offene Umgebung des Punktes $y' = f'(X_2)$ und $C' \subset Y'$ ihr Komplement; hierbei handelt es sich um eine rein 1-dimensionale abgeschlossene Teilmenge, und die generische Faser C'_η ist 0-dimensional. Die strikt transformierte $C \subset Y$ berührt nach Konstruktion die abgeschlossene Faser Y_σ nur in dem Punkt y . Eine notwendige Bedingung für die Existenz

einer Kontraktion ist also die Existenz eines Quasi-Schnitts $A \subset Y$ mit $A \cap f^{-1}(\sigma) = \{y\}$.

Um diese Beobachtung auszunutzen, benutzen wir die K -Gruppe $K(Y)$ der kohärenten \mathcal{O}_Y -Moduln und den assoziierten graduierten Modul $\text{Gr}(Y)$. Da $f : Y \rightarrow Z$ flach ist, existiert nach [SGA 6, X 7.3] ein Spezialisierungs-Homomorphismus

$$s : K(Y_\eta) \longrightarrow K(Y_\sigma),$$

der mit der Filtrierung verträglich ist.

Wir wollen nun den *Satz von Mordell-Weil* auf unser Problem anwenden. Man kann diesen Satz folgendermaßen formulieren [11, p. 139]: sei k ein Körper, K ein endlich erzeugter Oberkörper vom Transzendenzgrad 1, und A ein abelsches Gruppenschema über K . Wenn jedes abelsche Untergruppenschema $A' \neq 0, A$ einen transzendenten Definitionskörper hat, dann ist die Gruppe der rationalen Punkte $A(K)$ endlich erzeugt. Wenden wir diese Resultat auf unser Problem an, ergibt sich folgendes Kriterium:

(5.3.3) Proposition. *Sei k ein algebraisch abgeschlossener, überabzählbarer Körper, Z eine Lokalisierung der algebraischen Kurve zum Funktionenkörper K , und $Y \rightarrow C$ eine glatte Faserung vom Geschlecht $g > 0$. Wenn keine nicht-triviale Untergruppe $A' \neq 0, A$ von $A = \text{Pic}_{Y_K/K}$ über k definiert ist, dann gibt es unendlich viele abgeschlossene Punkte $y \in Y_\sigma$, für welche die Kontraktion $f' : X \rightarrow Y'$ nicht existiert.*

Da Y_σ regulär ist, muss die kanonische Abbildung

$$\text{Pic}(Y_\sigma, \mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Gr}_1(Y_\sigma, \mathbb{Q})$$

bijektiv sein. Da k algebraisch abgeschlossen und überabzählbar ist, muss $\text{Pic}(Y_\sigma)$ überabzählbar sein; da seine Torsionsuntergruppe abzählbar ist, muss auch $\text{Pic}(Y_\sigma, \mathbb{Q})$ überabzählbar sein. Nach dem Satz von Mordell-Weil kann die Abbildung $\text{Gr}_1(Y_\eta, \mathbb{Q}) \longrightarrow \text{Gr}_1(Y_\sigma, \mathbb{Q})$ nicht surjektiv sein, und die Aussage folgt aus den vorangegangenen Beobachtungen. QED.

(5.3.4) Wir können ein explizites Beispiel mit der *j -Invarianten* einer elliptischen Kurve konstruieren. Sei $j \in K$ ein transzendentes Element und Y_K die zugehörige elliptische Kurve. Dann ist das Gruppenschema $\text{Pic}_{Y_K/K}$ isomorph zu Y_K und erfüllt die Bedingung des Satzes von Mordell-Weil. Indem wir eine Einbettung $Y_K \subset P_K^n$ und einen geeigneten Abschluss in P_C^n wählen, haben wir eine gefaserte Fläche $f : Y \rightarrow C$ wie oben konstruiert.

(5.3.5) Wir können die obige Idee benutzen, um eine normale algebraische Fläche Y' zu konstruieren, die eigentlich, aber nicht projektiv ist. Sei k ein überabzählbarer algebraisch abgeschlossener Grundkörper, $Z = P^1$ die projektive Gerade, und C eine glatte Kurve vom Geschlecht $g > 0$. Wir betrachten die Fläche $Y = C \times Z$ als Faserung vom Geschlecht g über Z .

Sei $y_1 \in Y$ ein abgeschlossener Punkt, $c_1 \in C$ und $z_1 \in Z$ seine Bilder, und $f : X \rightarrow Y$ seine Aufblasung. Die strikt Transformierte $D \subset X$ von Y_{c_1} ist disjunkt zur strikt Transformierten $R_1 \subset X$ der abgeschlossenen Faser $Y_1 = Y_{z_1}$, und liefert eine projektive Kontraktion von $R_1 \subset X$. Sei $\eta \in Z$ der generische Punkt und $M \subset \text{Pic}(X_\eta)$ die Untergruppe, die von allen effektiven Divisoren $D_\eta \subset X_\eta$ erzeugt wird, deren Spezialisierung $D_1 \subset X_1$ disjunkt zu R_1 ist, also nur die f -exzeptionelle Kurve $E_1 \subset X$ passieren. Ist \mathfrak{X} die Kompletterung von $X_1 \subset X$ und $\mathfrak{X}' \subset \mathfrak{X}$ die Komponente zu R_1 , so gilt

$$\text{Pic}(\mathfrak{X}) = \text{Pic}(\mathfrak{X}') \oplus \mathbb{Z},$$

und die Klassen der Spezialisierungen D_1 liegen im zweiten Summanden. Nach dem Existenzsatz von Grothendieck [EGA III, 5.1.4] und treu-flachem Abstieg muss $\text{deg} : M \rightarrow \mathbb{Z}$ bijektiv sein. Sei $z_2 \neq z_1$ ein weiterer abgeschlossener Punkt der projektiven Geraden, $Y_2 \subset Y$ seine Faser, und $N \subset \text{Pic}(Y_2)$ die Untergruppe, die von allen Klassen erzeugt wird, für die ein Vielfaches in der Spezialisierung $M_2 \subset \text{Pic}(Y_2)$ von M enthalten ist. Da die Torsionsgruppe von $\text{Pic}(Y_2)$ abzählbar ist, muss N abzählbar sein. Da der Grundkörper überabzählbar und die Kurve C nicht-rational ist, können wir einen abgeschlossenen Punkt $c_2 \in C$ finden, dessen Klasse nicht in N enthalten ist. Sei $x_2 \in X$ der abgeschlossene Punkt über c_2 und z_2 , und $W \rightarrow X$ seine Aufblasung. Wie oben findet sich eine projektive Kontraktion der strikt Transformierten $R_2 \subset W$ von $X_2 = X_{z_2}$; folglich können wir durch Verheften eine eigentliche normale Fläche Y' und eine Kontraktion $W \rightarrow Y'$ von $R_1 \cup R_2$ konstruieren.

Angenommen, diese Fläche ist projektiv. Dann gibt es einen amplen Divisor $D' \subset Y'$, der die zwei Singularitäten nicht berührt. Sein Urbild in W ist disjunkt zu $R_1 \cup R_2$, und seine strikt Transformierte $D \subset X$ ist disjunkt zu R_1 und erfüllt $D \cap X_2 = \{x_2\}$, im Widerspruch zur Wahl von x_2 . Somit ist Y' nicht projektiv. Wie man leicht sieht, gibt es keinen horizontalen effektiven Divisor $D' \subset Y'$, und die Neron-Severi-Gruppe von Y' ist vom Rang 1.

5.4. Affine offene Teilmengen

In diesem Abschnitt charakterisieren wir die affinen offenen Teilmengen $U \subset X$ einer relativen Kurve durch ihre Komplemente und beschreiben die kontrahierbaren Kurven. Wir beginnen mit der Untersuchung von normalen auflösbaren Flächen, auf die sich der allgemeine Fall reduzieren lässt.

(5.4.1) Im Folgenden sein Z eine henselsche noethersche Kurve mit abgeschlossenem Punkt $\sigma \in Z$ und $f : X \rightarrow Z$ eine normale, auflösbare relative Kurve. Jeder Zykel $A \in Z^1(X)$ besitzt eine Zerlegung $A = A_h + A_v$ in *horizontalen* und *vertikalen* Anteil. Wir bezeichnen einen effektiven Zyklus $A \subset Y$ als *erlaubt*, wenn sein horizontaler Anteil A_h jede zusammenhängende Komponente des vertikalen Anteils A_v berührt. Erlaubte Zyklen tragen numerisch positive Zyklen:

(5.4.2) Proposition. *Ist $A \subset X$ eine erlaubte Kurve, so gibt es einen Zyklus $D \subset X$ mit Träger A so, dass $D \cdot C > 0$ für jede irreduzible Komponente $C \subset A_v$ gilt.*

Ohne Einschränkung sei A_v zusammenhängend. Dann findet sich eine Folge C_1, \dots, C_n mit $C_i \cap C_{i+1}$ und $C_n \cap A_h$ nicht-leer, in der alle irreduziblen Komponenten von A_v mindestens einmal auftauchen. Dann liefert $D = \sum n_i C_i + n A_h$ für geeignete positive Koeffizienten den gewünschten Zyklus. QED.

Wir bezeichnen einen Zyklus $A \subset Y$ als *strikt erlaubt*, wenn er erlaubt ist und jede irreduzible Komponente der abgeschlossenen Faser Y_σ berührt. Affine Teilmengen werden durch diese Zyklen charakterisiert:

(5.4.3) Proposition. *Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge und $A \subset X$ ihr Komplement. Dann ist U affin genau dann, wenn A strikt erlaubt ist.*

Angenommen, U ist affin. Dann ist A rein 1-kodimensional. Angenommen, es gibt eine zusammenhängende Komponente $R \subset A_v$, welche disjunkt zu A_h ist. Ist $h : X \rightarrow Y$ die Kontraktion dieser Kurve, so ist das Komplement der affinen Teilmenge $h(U) \subset Y$ von Kodimension 2, Widerspruch. Folglich ist A erlaubt. Da eine affine Teilmenge keine eigentlichen Kurven enthalten kann, muss es sogar strikt erlaubt sein.

Angenommen, A ist strikt erlaubt. Sei $g : W \rightarrow X$ die Auflösung der Singularitäten, die in A enthalten sind. Wie man leicht sieht, bleibt $g^*(A)$

ein erlaubter Zyklus, und wir können $A \subset \text{Reg}(X)$ annehmen. Nach (5.4.2) gibt es einen effektiven Divisor $D \subset X$ mit Träger A und $D \cdot C > 0$ für jede irreduzible Komponente $C \subset X_\sigma$. Der entsprechende invertierbare \mathcal{O}_X -Modul \mathcal{L} ist somit ampel. Sei s der globale Schnitt zum Divisor D und $S = \Gamma(X, \text{Sym } \mathcal{L})$. Dann ist $U = D_+(s)$ das Spektrum des Ringes $S_{(s)}$. QED.

(5.4.4) Wir verallgemeinern nun den Begriff der affinen offenen Teilmenge. Wir bezeichnen eine offene Teilmenge $U \subset X$ als *kontraktiv*, wenn ihre affine Hülle $U^{\text{aff}} = \text{Spec } \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ ein Z -Schema von endlichem Typ und der kanonische Morphismus $U \rightarrow U^{\text{aff}}$ eigentlich ist. Wir können diese Teilmengen durch erlaubte Zyklen charakterisieren:

(5.4.5) Proposition. *Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge und $A \subset X$ ihr Komplement. Dann ist U kontraktiv genau dann, wenn A erlaubt ist.*

Sei $R \subset X_\sigma$ die Vereinigung der irreduziblen Komponenten, die diskunkt zu A sind. Indem wir X durch die Kontraktion von $R \subset X$ ersetzen, können wir annehmen, dass A jede Komponente von berührt und U keine enthält. Also ist U kontraktiv genau dann, wenn es affin ist, und A erlaubt genau dann, wenn es strikt erlaubt ist. Die Behauptung folgt somit aus (5.4.3). QED.

(5.4.6) Wir verallgemeinern nun unsere Resultate auf nicht-normale Flächen. Im Folgenden sei Z weiterhin eine lokale noethersche Kurve und $X \rightarrow Z$ eine beliebige eigentliche relative Kurve. Wir erhalten dazu eine normale Fläche: Sei $Z' = \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z,\sigma}^\wedge)$ die Kompletterung der Basiskurve, $X' = X \times_Z Z'$, und $X'' \rightarrow X'$ die Normalisierung der Reduktion. Das Schema X'' ist eigentlich und zerfällt in normale Punkte, Kurven und Flächen. Wie bezeichnen eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ als strikt erlaubt, wenn ihr Urbild $A'' \subset X''$ folgende Bedingungen erfüllt:

- (i) Für jede 1-dimensionale Komponente $C \subset X''$ ist $C \cap A''$ nicht-leer.
- (ii) Für jede 2-dimensionale Komponente $S \subset X''$ ist das Urbild $S \cap A''$ ganz S oder eine strikt erlaubte Kurve.

Wir können mit diesem Begriff affine Komplemente charakterisieren:

(5.4.7) Theorem. *Sei $U \subset X$ eine offene Teilmenge und $A \subset X$ ihr Komplement. Dann ist U affin genau dann, wenn A strikt erlaubt ist.*

Benutzen wir den treu-flachen Abstieg, können wir annehmen, dass Z komplett ist. Nach dem Satz von Chevalley [EGA II, 6.7.1] können wir auch annehmen, dass X normal ist, und die Aussage ergibt sich aus (5.4.3). QED.

Wir geben nun eine Beschreibung der kontrahierbaren Kurven durch die Topologie der relativen Kurve:

(5.4.8) Theorem. *Sei $R \subset X_\sigma$ eine zusammenhängende abgeschlossene Kurve so, dass für keine irreduzible Kurve $C \subset X_\eta$ die Spezialisierung $\overline{C} \cap X_\sigma$ ganz in R enthalten ist. Dann gibt es eine Kontraktion $g : X \rightarrow Y$ von $R \subset X$ genau dann, wenn es eine zu R disjunkte abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ gibt, die jede andere integrale Kurve $C \subset X_\sigma$ berührt, und für jede 2-dimensionale Fläche $S \subset X''$ das Urbild $A'' \cap S$ mit S übereinstimmt oder eine erlaubte Kurve ist.*

Angenommen, es gibt so eine Kontraktion. Ist $U \subset Y$ eine affine Umgebung des Punktes $y = g(R)$, so löst das Komplement $A = Y \setminus U$ nach (5.4.7) unser Problem. Es ist zu zeigen, dass die Bedingung hinreichend ist. Sei $A \subset X$ so eine abgeschlossene Teilmenge und $U \subset X$ das offene Komplement. Es reicht zu zeigen, dass diese offene Teilmenge kontraktiv ist, also U^{aff} ein Z -Schema von endlichem Typ und $U \rightarrow U^{\text{aff}}$ ein eigentlicher Morphismus ist. Wegen treu-flachem Basiswechsel reicht es, dies über der Henselisierung Z' zu tun. Nach (5.1.3) existiert nun eine Kontraktion $X' \rightarrow Y'$, und wir können das Urbild A' auch als Teilmenge von Y' auffassen. Nach (5.4.7) ist $Y' \setminus A'$ affin, folglich ist U' kontraktiv. QED.

Literatur

- [EGA 0] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné: *Eléments de géométrie algébrique: Préliminaires*. Springer, Berlin Heidelberg New York 1970; Publ. Math. IHES 11 (1961), 20 (1964).
- [EGA I] A. Grothendieck, J.A. Dieudonné: *Eléments de géométrie algébrique: Le langage de schémas*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1970.
- [EGA II] A. Grothendieck: *Eléments de géométrie algébrique: Etude globale élémentaire de quelques classes de morphismes*. Publ. Math. IHES 8 (1961).
- [EGA III] A. Grothendieck: *Eléments de géométrie algébrique: Etude cohomologique des faisceaux cohérents*. Publ. Math. IHES 11 (1961), 17 (1963).
- [EGA IV] A. Grothendieck: *Eléments de géométrie algébrique: Etude locale des schémas et de morphismes de schémas*. Publ. Math. IHES 20 (1964), 24 (1965), 28 (1966), 32 (1967).
- [SGA 3] A. Grothendieck et al.: *Schémas en groupes*. Lecture Notes in Math. 151, 152, 153, Springer Verlag, Berlin etc., 1970.
- [SGA 6] A. Grothendieck et al.: *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*. Lecture Notes in Math. 225, Springer Verlag, Berlin etc., 1971.
- [SGA 7] A. Grothendieck et al.: *Groupe de monodromie en géométrie algébrique*. Lecture Notes in Math. 288, 340, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1972,1973.
- [1] M. Artin: Some numerical criteria for contractability of curves on algebraic surfaces. *Am. J. Math.* 84, 485-496 (1962).
- [2] M. Artin: Théorèmes de représentabilité pour les espaces algébriques. *Séminaire de mathématiques supérieures 44*. Les Presses de l'Université de Montréal, 1970.
- [3] N. Bourbaki: *Éléments de mathématique*. Topologie générale.

- [4] T. Chinburg: Minimal models for curves over Dedekind rings. Arithmetic geometry, Pap. Conf., Storrs/Conn. 1984, 309-326 (1986).
- [5] T. Fujisawa: On non-rational numerical Del Pezzo surfaces. Osaka J. Math. 32, 613-636 (1995).
- [6] T. Fujita: Semipositive line bundles. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, 30, 353-378 (1983).
- [7] R. Hartshorne: Ample vector bundles Publ. Math. IHES 29 (1966), 63–94
- [8] R. Hartshorne: Ample subvarieties of algebraic varieties. Lecture Notes in Math. 156, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York 1970.
- [9] R. Hartshorne: Algebraic geometry. Graduate texts in mathematics 52. Berlin etc.: Springer (1977).
- [10] V. Iskovskikh: Minimal models of rational surfaces over arbitrary fields. Math. USSR, Izv. 14, 17-39 (1980).
- [11] S. Lang: Fundamentals of diophantine geometry. New York etc.: Springer-Verlag (1983).
- [12] J. Lipman: Desingularization of two-dimensional schemes. Ann. Math., II. Ser. 107, 151–207 (1978).
- [13] D. Mumford: The topology of a normal surface singularity of an algebraic variety and criterion for simplicity. Publ. Math. IHES 9, 5–22 (1961).
- [14] D. Mumford: Enriques' classification of surfaces in char p I. Global Analysis, Papers in Honor of K. Kodaira, 325-339 (1969).
- [15] W. Lütkebohmert: On compactification of schemes. Manuscr. Math. 80, 95–111 (1993).
- [16] S. Mori: Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. Ann. Math. 116, 133-176 (1982).

- [17] J.-P. Serre: Groupes algebriques et corps de classes. Actualites scientifiques et industrielles 1264. Publications de l'Institut de Mathematique de l'Universite de Nancago. VII. Paris: Hermann (1975).
- [18] I. Shafarevich: Basic algebraic geometry. 2: Schemes and complex manifolds. Berlin: Springer-Verlag (1994).
- [19] O. Zariski: The theorem of Riemann-Roch for high multiples of an effective divisor on an algebraic surface. Ann. Math., 76, 560-615 (1962).

Lebenslauf

Geboren in Hamburg	4.3.1968
Grundschule Harksheide	1974–1978
Gymnasium Ohlstedt	1978–1987
Wehr- und Zivildienst	1987–1989
Studium an der Georg-August-Universität, Göttingen	1989–1994
Aufenthalt am SFB 343, Bielefeld	1994–1995
Doktorand an der Ruhr-Universität, Bochum	1995–1998