

Radikale von separablen Algebren über Ringen

Robert Wisbauer

Eine endlichdimensionale assoziative Algebra A über einem Körper K ist *separabel* über K , wenn für jede Körpererweiterung L von K das Nilradikal (= Jacobson-Radikal) von $A \otimes_K L$ gleich dem Nullideal ist. Nach Auslander-Goldman heißt eine assoziative Algebra über einem assoziativen und kommutativen Ring R *separabel* über R , wenn A als $A \otimes_R A^0$ -Modul projektiv ist. In Müller [7] wird eine nichtassoziative Algebra A über R , die als R -Modul endlich erzeugt und projektiv ist, *separabel* über R genannt, wenn die zugehörige assoziative Multiplikationsalgebra $M(A)$ separabel über R ist. Ein Radikal von A tritt bei diesen Verallgemeinerungen nicht auf. Es kann durchaus nichttriviale Radikale in separablen Algebren über Ringen geben, die dann allerdings meist durch das entsprechende Radikal im Grundring bestimmt sind.

Wir werden in dieser Arbeit zeigen, daß das Nilradikal von (nichtassoziativen) separablen Algebren A über dem Ring R gleich dem Primradikal von A ist und bei beliebiger Grundringerweiterung mit einer assoziativen und kommutativen R -Algebra S die Form $\text{Nil}(A \otimes_R S) = A \otimes_R \text{Nil } S$ hat. Bei alternativen und Jordan-Algebren ist diese Gestalt des Nilradikals auch ein hinreichendes Kennzeichen für die Separabilität.

In einer separablen R -Algebra A stimmt das Brown-McCoy-Radikal mit dem Jacobson-Radikal überein. Ist A als R -Modul frei, so erhalten wir $\text{BMc}(A \otimes_R S) = \text{Jac}(A \otimes_R S) = A \otimes_R \text{Jac } S$ (für alle S wie oben).

Andererseits lassen sich in diesem Fall die separablen Algebren durch die Form des Brown-McCoy-Radikals charakterisieren (Satz (3.4)). In einer großen Klasse von Algebren können die separablen auch durch die Gestalt des Jacobson-Radikals bestimmt werden (Satz (3.7)).

Die erhaltenen Ergebnisse sind Verallgemeinerungen der für Matrizenringe über Ringen bekannten Zusammenhänge.

1. Vorbemerkungen

Alle Ringe und Algebren sollen ein Einselement besitzen. A bezeichne stets eine nicht notwendig assoziative Algebra über dem kommutativen und assoziativen Ring R ; $\mathbb{P}_R$ sei die Klasse der endlich erzeugten, projektiven, unitären R -Moduln und $\mathcal{R}$ die Klasse der kommutativen und assoziativen R -Algebren. Die von den Links- und Rechtsmultiplikationen in A erzeugte Unteralgebra von $\text{End}_R(A)$ nennt man die *Multiplikationsalgebra* von A ($=: M(A)$).

Ist $S \in \mathcal{R}$, so gibt es einen kanonischen Homomorphismus $\varphi: \text{End}_R(A) \otimes_R S \rightarrow \text{End}_S(A \otimes_R S)$, der einen Epimorphismus $\bar{\varphi}: M(A) \otimes_R S \rightarrow M(A \otimes_R S)$ induziert. Ist $A \in \mathbb{P}_R$, so ist $\bar{\varphi}$ ein Isomorphismus.

(1.1) Nach Müller [7] heiße eine R -Algebra A mit $A \in \mathcal{IP}_R$ *separabel* ber R , wenn $M(A)$ eine separable (assoziative) Algebra im Sinne von Auslander-Goldman ist.

(1.2) Eine assoziative R -Algebra B ist genau dann separabel über R , wenn für jedes $S \in \mathcal{R}$ die Algebra $B \otimes_R S$ *linkshalbeinfach* ber S ist (Hirato-Sugano [5], Corollary 2.16).

2. Nil- und Primradikal von A

Ein Element a der (nichtassoziativen) Algebra A heißt *nilpotent*, wenn es ein endliches Produkt von a gibt, das bei geeigneter Klammerung gleich Null ist. Ist jedes Element eines Ideals J von A nilpotent, so nennt man J ein *Nilideal*. Unter dem *Nilradikal* versteht man das maximale Nilideal von A ($=: \text{Nil } A$) (Behrens [1]).

Als *Primradikal* von A ($=: \text{Prim } A$) definiert man den Durchschnitt der Primideale in A (Behrens [2]). In einem assoziativen und kommutativen Ring R gilt bekanntlich $\text{Prim } R = \text{Nil } R$.

(2.1) **Hilfssatz.** *Für eine R -Algebra A gilt*

$$(\text{Nil } R) \cdot A \subseteq \bigcap \{ \mathfrak{p} A; \mathfrak{p} \text{ Primideal in } R \} \subseteq \text{Prim } A \subseteq \text{Nil } A.$$

Beweis. Die linke Relation ist klar, die rechte bekannt (Behrens [6], S. 174). Um die mittlere zu zeigen, können wir ohne Einschränkung annehmen, daß A ein treuer R -Modul sei. Ist $\mathfrak{P}$ ein Primideal in A , so ist $\mathfrak{p} := R \cap \mathfrak{P}$ ein Primideal in R ; zu jedem $\mathfrak{P}$ gibt es also ein Primideal $\mathfrak{p}$ in R mit $\mathfrak{p} A \subseteq \mathfrak{P}$.

(2.2) **Hilfssatz.** *Sei A eine Algebra über einem Integritätsbereich R und als R -Modul endlich erzeugt und frei. Ist $M(A)$ linkshalbeinfach über R , so ist $\text{Nil } A$ gleich Null.*

Beweis. Sei Q der Quotientenkörper von R . $M(A) \otimes_R Q \simeq M(A \otimes_R Q)$ ist als linkshalbeinfache Algebra über dem Körper Q direkte Summe von einfachen Idealen (Hirato-Sugano [5], Proposition 1.12). Dann ist aber auch $A \otimes_R Q$ direkte Summe von einfachen Idealen, also $\text{Nil}(A \otimes_R Q) = \{0\}$ und daher $(\text{Nil } A) \otimes_R Q = \{0\}$. Da A ein freier R -Modul sein sollte, bedeutet das auch $\text{Nil } A = \{0\}$.

(2.3) **Satz.** *Ist A eine R -Algebra mit $A \in \mathcal{IP}_R$ und $M(A)$ linkshalbeinfach über R , so gilt $\text{Nil } A = (\text{Nil } R) \cdot A = \text{Prim } A$.*

Beweis. Sei A zunächst ein freier Modul. Dann ist $\bigcap \{ \mathfrak{p} A; \mathfrak{p} \text{ Primideal in } R \} = \bigcap \{ \mathfrak{p}; \mathfrak{p} \text{ Primideal in } R \} \cdot A = (\text{Nil } R) \cdot A$ und wegen (2.1) genügt es, $\text{Nil } A \subseteq \bigcap \mathfrak{p} A$ zu zeigen. Die Faktoralgebra $A / \bigcap \mathfrak{p} A$ ist subdirekte Summe der Algebren $A / \mathfrak{p} A \simeq A \otimes_R R / \mathfrak{p}$; $M(A \otimes_R R / \mathfrak{p}) \simeq M(A) \otimes_R R / \mathfrak{p}$ ist eine linkshalbeinfache Algebra über dem Integritätsbereich $R / \mathfrak{p}$ (Hirato-Sugano [5], Proposition 1.2), und nach (2.2) ist daher $\text{Nil}(A \otimes_R R / \mathfrak{p}) = \{0\}$. Dann ist auch das Nilradikal von $A / \bigcap \mathfrak{p} A$ gleich Null und somit $\text{Nil } A \subseteq \bigcap \mathfrak{p} A$.

Ist A projektiver R -Modul, so ist für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R die Algebra $A \otimes_R R_{\mathfrak{m}}$ als $R_{\mathfrak{m}}$ -Modul frei und $M(A \otimes_R R_{\mathfrak{m}})$ linkshalbeinfach über $R_{\mathfrak{m}}$. Nach dem vorher gezeigten gilt dann $\text{Nil}(A \otimes_R R_{\mathfrak{m}}) = (\text{Nil } R_{\mathfrak{m}}) \cdot (A \otimes_R R_{\mathfrak{m}}) = A \otimes_R \text{Nil } R_{\mathfrak{m}}$. Da bekanntlich $\text{Nil } R_{\mathfrak{m}} = (\text{Nil } R) \cdot R_{\mathfrak{m}}$, folgt daraus

$$(\text{Nil } A) \otimes_R R_{\mathfrak{m}} \subseteq \text{Nil}(A \otimes_R R_{\mathfrak{m}}) = (\text{Nil } R) \cdot A \otimes_R R_{\mathfrak{m}} \subseteq (\text{Nil } A) \otimes_R R_{\mathfrak{m}}.$$

Aus dem Lokal-Global-Prinzip erhalten wir damit $\text{Nil } A = (\text{Nil } R) \cdot A$.

Wegen (1.2) ergibt sich:

(2.4) **Korollar.** *Ist A eine R -Algebra mit $A \in \mathbb{P}_R$ und $M(A)$ eine separable R -Algebra, so gilt für jedes $S \in \mathcal{R}$ $\text{Prim}(A \otimes_R S) = \text{Nil}(A \otimes_R S) = A \otimes_R \text{Nil } S$.*

Dies ist eine Verallgemeinerung einer Kennzeichnung des Nilradikals von streng potenzassoziativen C -Kompositionsalgebren mit nichtsingulärer Spurbilinearform in Wisbauer [11] (Satz 4.6).

In einigen Fällen gilt auch die Umkehrung von (2.4):

(2.5) **Satz.** *Eine assoziative R -Algebra mit $A \in \mathbb{P}_R$ ist genau dann separabel über R , wenn für jedes $S \in \mathcal{R}$ gilt: $\text{Nil}(A \otimes_R S) = A \otimes_R \text{Nil } S$.*

Der Beweis ist fast identisch mit dem Beweis des folgenden Satzes:

(2.6) **Satz.** *Sei A eine alternative R -Algebra mit $A \in \mathbb{P}_R$ und $M(A)$ als R -Modul endlich erzeugt. A ist genau dann separabel über R , wenn für jedes $S \in \mathcal{R}$ gilt: $\text{Nil}(A \otimes_R S) = A \otimes_R \text{Nil } S$.*

Beweis. Hat das Nilradikal die gewünschte Gestalt, so ist für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R $\text{Nil}(A \otimes_R R/\mathfrak{m})$ gleich Null und somit $A \otimes_R R/\mathfrak{m}$ direkte Summe von einfachen Idealen. Dann ist aber auch $M(A) \otimes_R R/\mathfrak{m}$ direkte Summe von einfachen Algebren (z.B. Müller [7], Satz 1). Da dies für jede Grundkörpererweiterung gilt, ist $M(A) \otimes_R R/\mathfrak{m}$ eine separable $R/\mathfrak{m}$ -Algebra und nach DeMeyer-Ingraham [4], Theorem 7.1, ist damit $M(A)$ separable R -Algebra.

Ist im Ring R die 2 invertierbar, so nennen wir eine Algebra A über R eine *Jordanalgebra*, wenn sie kommutativ ist und der Identität $(ab)a^2 = a(ba^2)$ für alle $a, b \in A$ genügt. Für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R ist dann $A \otimes_R R/\mathfrak{m}$ eine Jordanalgebra im üblichen Sinne ($\text{Char } R/\mathfrak{m} \neq 2$) und analog (2.6) läßt sich zeigen:

(2.7) **Satz.** *Sei 2 invertierbar in R , A eine Jordanalgebra über R mit $A \in \mathbb{P}_R$ und $M(A)$ endlich erzeugter R -Modul. Genau dann ist A separabel über R , wenn für jedes $S \in \mathcal{R}$ gilt: $\text{Nil}(A \otimes_R S) = A \otimes_R \text{Nil } S$.*

3. Jacobson- und Brown-McCoy-Radikal von A

Als *Links-Jacobson-Radikal* ($=: \text{Jac } A$) einer (nichtassoziativen) Algebra A wollen wir das von Brown [3] eingeführte, maximale links-quasireguläre Ideal von A bezeichnen. Dies ist das größte Ideal, das im Durchschnitt der maximalen (modularen) Linksideale von A enthalten ist. Ein Ring B heißt *links-primitiv*, wenn es in ihm ein maximales Linksideal gibt, das selbst kein Ideal ungleich Null enthält. Genau dann ist $\text{Jac } A = \{0\}$, wenn A subdirekte Summe von links-primitiven Ringen ist. Entsprechend kann das Rechts-Jacobson-Radikal von A definiert werden, das im allgemeinen nicht mit $\text{Jac } A$ übereinstimmt. Unter dem *Brown-McCoy-Radikal* von A ($=: \text{BMc } A$) verstehen wir den Durchschnitt der Ideale J von A , für die A/J einfacher Ring mit Einselement ist (Smiley [8]). Da einfache Ringe mit Einselement links-primitiv sind, gilt offensichtlich $\text{Jac } A \subseteq \text{BMc } A$. In kommutativen Ringen stimmen die beiden Radikale überein.

(3.1) **Hilfssatz.** *Ist die R -Algebra A als R -Modul endlich erzeugt, so gilt:*

$$(\text{Jac } R) \cdot A \subseteq \bigcap \{ \mathfrak{m}A; \mathfrak{m} \text{ maxim. Ideal in } R \} \subseteq \text{Jac } A \subseteq \text{BMc } A.$$

Beweis. Wegen $\text{Jac } R = \bigcap \mathfrak{m}$ ist die erste Inklusion klar. Zur zweiten Inklusion ist zu zeigen, daß $\bigcap \mathfrak{m}A$ in jedem maximalen Linksideal von A enthalten ist. Angenommen es sei $\bigcap \mathfrak{m}A$ nicht in dem maximalen Linksideal $\mathfrak{M}$ von A enthalten. Dann ist $\mathfrak{M} + \bigcap \mathfrak{m}A = A$ und die Fortsetzung der Injektion $\delta: \mathfrak{M} \rightarrow A$ zu $\delta_{\mathfrak{m}}: \mathfrak{M} \otimes_R R/\mathfrak{m} \rightarrow A \otimes_R R/\mathfrak{m}$ ist für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R eine Surjektion; also ist auch δ surjektiv, das heißt $\mathfrak{M} = A$.

(3.2) **Lemma.** *Sei A eine R -Algebra und als R -Modul endlich erzeugt. Ist $M(A)$ linkshalbeinfach über R , so gilt $\text{BMc } A = \text{Jac } A = \bigcap \{ \mathfrak{m}A; \mathfrak{m} \text{ maximales Ideal in } R \}$, und das Links-Jacobson-Radikal stimmt mit dem Rechts-Jacobson-Radikal überein.*

Beweis. Ist $M(A)$ linkshalbeinfach über R , so ist $M(A \otimes_R R/\mathfrak{m})$ als homomorphes Bild der halbeinfachen Algebra $M(A) \otimes_R R/\mathfrak{m}$ selbst halbeinfach. Die Faktor-algebra $A/\bigcap \mathfrak{m}A$ ist subdirekte Summe der $A \otimes_R R/\mathfrak{m}$, die direkte Summe von einfachen Idealen sind und für die daher $\text{BMc}(A \otimes_R R/\mathfrak{m}) = \{0\}$. Dann ist aber auch das Brown-McCoy-Radikal von $A/\bigcap \mathfrak{m}A$ gleich Null, also $\text{BMc } A \subseteq \bigcap \mathfrak{m}A$. Die Übereinstimmung von Links- und Rechts-Jacobson-Radikal ist damit klar.

Ist A als R -Modul frei, so gilt offensichtlich $\bigcap \mathfrak{m}A = (\bigcap \mathfrak{m})A = (\text{Jac } R)A$, also

(3.3) **Korollar.** *Sei A eine R -Algebra, die als R -Modul endlich erzeugt ist. Ist $M(A)$ linkshalbeinfach über R , so gilt:*

- (1) *Ist A als R -Modul frei, so ist $\text{BMc } A = \text{Jac } A = (\text{Jac } R)A$;*
- (2) *Ist R lokaler Ring, $\mathfrak{m}$ das maximale Ideal von R , so gilt $\text{BMc } A = \text{Jac } A = \mathfrak{m}A$.*

Für separable Algebren erhalten wir daraus:

(3.4) **Satz.** *Sei die R -Algebra A als R -Modul endlich erzeugt und frei und $M(A)$ endlich erzeugter R -Modul. Genau dann ist A separabel über R , wenn für jedes $S \in \mathcal{R}$ gilt: $\text{BMc}(A \otimes_R S) = A \otimes_R \text{BMc } S$.*

Aus (3.2) ergibt sich, daß dann $\text{Jac } A$ und $\text{BMc } A$ übereinstimmen.

Beweis. Es ist noch zu zeigen, daß aus der gegebenen Form des Brown-McCoy-Radikals die Separabilität von $M(A)$ folgt. Da $\text{BMc}(A \otimes_R R/\mathfrak{m}) = \{0\}$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R , ist $A \otimes_R R/\mathfrak{m}$ und damit auch $M(A) \otimes_R R/\mathfrak{m}$ direkte Summe von einfachen Idealen; der Rest folgt analog (2.6).

In einer großen Klasse von Algebren lassen sich die separablen auch durch die Gestalt des Jacobson-Radikals bei Grundringerweiterungen charakterisieren. Betrachten wir dazu Algebren mit der Eigenschaft:

(3.5) Für jeden Epimorphismus $\varphi: A \rightarrow B$ gilt: Ist B links-primitiv, so ist B kommutativ oder alternativ.

Diese Eigenschaft haben zum Beispiel die in Thedy [10] und – falls 3 im Grundring invertierbar – auch die in Thedy [9] untersuchten Algebren. Ist A eine R -Algebra, die zu einer der von Thedy eingeführten Klassen gehört (mit der eben genannten Einschränkung), so gilt (3.5) auch für $A \otimes_R S$ mit beliebigem $S \in \mathcal{R}$. Man kann sich leicht überlegen, daß in einer Algebra mit Eigenschaft (3.5) das

Links- und Rechts-Jacobson-Radikal übereinstimmen und gleich dem Durchschnitt der maximalen (modularen) Linksideale (oder Rechtsideale) sind (vgl. Kleinfeld [6], Theorem 3). Außerdem gilt:

(3.6) **Lemma.** *Sei A eine Algebra mit absteigender Kettenbedingung für Links- (oder Rechts-) Ideale, welche die Forderung (3.5) erfüllt.*

(1) *Ist $\text{Jac } A = \{0\}$, so ist A direkte Summe von endlich vielen einfachen Algebren mit Einselement und absteigender Kettenbedingung für Links- und Rechtsideale;*

(2) *$\text{Jac } A$ stimmt mit $\text{BMc } A$ überein.*

Beweis. (1) Ist $\text{Jac } A = \{0\}$, so gibt es eine endliche Familie von links-primitiven Idealen P_i , $i \in I$, für die der Durchschnitt aller P_i gleich Null, der Durchschnitt jeder echten Teilmenge aber ungleich Null ist. A/P_i ist ein primitiver Ring mit absteigender Kettenbedingung für Linksideale der alternativ oder kommutativ und somit ein einfacher Ring (mit Einselement) ist (vgl. Kleinfeld [6], Theorem 2). Daher ist P_i ein maximales Ideal in $A = S_i + P_i$ mit $S_i := \bigcap_{i \neq j} P_j$; wegen $S_i \cap P_i = \{0\}$ ist A direkte Summe der Ideale P_i und $S_i \simeq A/P_i$. In endlich vielen Schritten erhält man so A als direkte Summe der einfachen Algebren S_i . (2) ist unmittelbare Folgerung aus (1).

(3.7) **Satz.** *Sei A eine R -Algebra, die als R -Modul endlich erzeugt und frei ist, und für jedes $S \in \mathcal{R}$ erfülle $A \otimes_R S$ die Bedingung (3.5). Ist $M(A)$ als R -Modul endlich erzeugt, so ist A genau dann separabel über R , wenn für alle $S \in \mathcal{R}$ gilt: $\text{Jac}(A \otimes_R S) = A \otimes_R \text{Jac } S$.*

Unter Berücksichtigung von (3.6) ergibt sich der Beweis analog (3.4).

Literatur

1. Behrens, E.A.: Nichtassoziative Ringe. Math. Ann. **127**, 441–452 (1954)
2. Behrens, E.A.: Zur additiven Idealtheorie in nichtassoziativen Ringen. Math. Z. **64**, 169–182 (1956)
3. Brown, B.: An Extension of the Jacobson Radical. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 114–117 (1951)
4. De Meyer, F., Ingraham, E.: Separable Algebras over commutative Rings. Lecture Notes in Mathematics 181, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1971
5. Hirato, K., Sugano, K.: On semisimple extensions and separable extensions over non-commutative rings. J. math. Soc. Japan **18**, 360–373 (1966)
6. Kleinfeld, E.: Primitive alternative rings and semisimplicity. Amer. J. Math. **77**, 725–730 (1955)
7. Müller, G.N.: Nicht assoziative separable Algebren über Ringen. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg **40**, 115–131 (1974)
8. Smiley, M.F.: Application of a radical of Brown and McCoy to non-associative rings. Amer. J. Math. **72**, 93–100 (1950)
9. Thedy, A.: On rings with completely alternative commutators. Amer. J. Math. **93**, 42–51 (1971)
10. Thedy, A.: On rings with commutators in the nuclei. Math. Z. **119**, 213–218 (1971)
11. Wisbauer, R.: Homogene Polynomgesetze auf nichtassoziativen Algebren über Ringen. Erscheint in J. reine angew. Math.

Dr. Robert Wisbauer
Math. Institut der Universität
D-4000 Düsseldorf, Universitätsstraße 1
Bundesrepublik Deutschland

(Eingegangen am 22. Mai 1974)