Homogene Polynomgesetze auf nichtassoziativen Algebren über Ringen

Von *Robert Wisbauer* in Düsseldorf

Einleitung

Die Normform (generic norm) N einer endlich-dimensionalen Algebra A über einem Körper ist bekanntlich multiplikativ, falls A alternativ ist. Ist A eine Jordanalgebra, so gilt für x, y aus A nur noch das Kompositionsgesetz

$$N(2(xy)x - x^2y) = N(x)^2 N(y).$$

Schafer betrachtet in [13] Formen dritten Grades auf nichtassoziativen Algebren, die eine entsprechende Komposition erlauben. Weitergeführt wurden diese Überlegungen in McCrimmon [9], [10] auf Formen beliebigen Grades, für die ein recht allgemeines Kompositionsgesetz gilt. Als Grundbereiche sind dabei Körper mit unendlich vielen Elementen und Charakteristik ungleich 2 zugelassen. Bei den Definitionen und Schlußweisen werden diese Voraussetzungen wesentlich mitverwendet.

In der vorliegenden Arbeit sollen diese Betrachtungen auf Algebren über beliebigen kommutativen und assoziativen Ringen übertragen werden. Dabei ist zunächst die Definition von Formen auf Moduln notwendig. Zwei verschiedene Formbegriffe stehen uns zur Verfügung:

In Bergmann [2] wird eine Form vom Grad n auf dem Modul M durch eine lineare Abbildung auf einem Untermodul der symmetrischen Elemente von $\underset{n}{\otimes} M$ gekennzeichnet. In [2] werden auch multiplikative Formen auf Algebren über Ringen definiert. Eine ausführliche Darstellung der sich daraus ergebenden Zusammenhänge findet man in Baumgartner [1].

Eine weitergehende Verallgemeinerung der inhomogenen Polynome sind die *Polynomgesetze* in Roby [12]. Dort steht die Fortsetzbarkeit der Abbildungen auf beliebige Grundringerweiterungen, die auch bei Bergmann-Formen gegeben ist, im Vordergrund der Definition. Der Zusammenhang der beiden Begriffsbildungen wird in dieser Arbeit nicht weiter untersucht. Es sei nur erwähnt, daß bei flachen Moduln die homogenen Polynomgesetze von Roby genau den Formen von Bergmann entsprechen.

Wir wollen hier die Definition von Roby zugrunde legen. Mit Hilfe der Polarisation (§ 1) können wir dann auch mit den Koeffizienten eines Polynomgesetzes rechnen, was sich in den Arbeiten von Bergmann (Rechnen mit den „reduzierten Funktionen") als recht vorteilhaft erwiesen hat.

Analog zu McCrimmon formulieren wir eine Komposition ($=: C$-Komposition) für homogene Polynomgesetze auf Algebren über beliebigen kommutativen Ringen (§ 3). Dabei müssen wir die bei der Komposition auftretenden rationalen Funktionen durch Polynomgesetze ersetzen.

In § 4 wird die Struktur von C-Kompositionsalgebren mit nichtausgearteter und nichtsingulärer (vgl. § 2) Spurbilinearform untersucht. Es zeigt sich, daß dies, unter geeigneten Voraussetzungen, speziell algebraische, separable, nichtkommutative Jordan-algebren sind. Der Begriff der Separabilität von nichtassoziativen Algebren über Ringen wird dabei in geeigneter Weise definiert (Definition (4. 1)). Er stimmt weitgehend mit der in Müller [11] gegebenen Definition überein.

I. Polynomgesetze auf Moduln

M und N seien unitäre Moduln über einem kommutativen und assoziativen Ring R mit Einselement. Ist $\{T_i\}$ eine abzählbare Familie von vertauschbaren Unbestimmten T_i über R, so schreiben wir für den Polynomring in diesen Unbestimmten kurz $R[T]$.

$\mathfrak{R}$ bezeichne die Klasse der kommutativen und assoziativen R-Algebren S mit Einselement 1_S. Von Algebrenhomomorphismen wird verlangt, daß das Einselement wieder in das Einselement übergeht; mit id_S meinen wir die Identität auf dem jeweiligen Definitionsbereich S.

§ 1. Polynomgesetze, Polarisation

Von Roby [12] übernehmen wir

Definition (1. 1). Eine Familie von Abbildungen $\{F_S\}_{S\in\mathfrak{R}}$, $F_S: M\otimes_R S\to N\otimes_R S$, heißt ein *Polynomgesetz auf* (M, N), wenn für alle $S, S'\in\mathfrak{R}$ und jeden R-Algebrenhomomorphismus $u: S\to S'$ folgendes Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} M\otimes_R S & \xrightarrow{F_S} & N\otimes_R S \\ {\scriptstyle \mathrm{id}_M\otimes u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_N\otimes u} \\ M\otimes_R S' & \xrightarrow{F_{S'}} & N\otimes_R S' \end{array}.$$

F_S nennen wir die durch das Polynomgesetz $\{F_S\}$ bestimmte *Polynomabbildung* von $M\otimes_R S$ in $N\otimes_R S$.

Ein Polynomgesetz $\{F_S\}$ auf (M, N) heißt *homogen vom Grad* n, wenn $F_S(zr) = F_S(z)r^n$ für alle $S\in\mathfrak{R}$, $z\in M\otimes_R S$ und $r\in S$ gilt.

Definition (1. 2). Ist $\{F_S\}$ homogen vom Grad n, so nennen wir F_R eine *Form vom Grad* n auf M mit Werten in N. Die Polynomabbildung F_S, $S\in\mathfrak{R}$, bezeichnen wir als die *Fortsetzung* von F_R auf $M\otimes_R S$.

Beispiele für homogene Polynomgesetze geben etwa die Formen auf Moduln im Sinne von Bergmann [2]: Eine Bergmann-Form (F, Φ) auf M mit Werten in N läßt sich für $S\in\mathfrak{R}$ zu einer Form (F_S, Φ_S) auf $M\otimes_R S$ fortsetzen. Die dadurch bestimmte Familie von Abbildungen $F_S: M\otimes_R S\to N\otimes_R S$ ist ein homogenes Polynomgesetz auf (M, N).

Definition (1. 3). Ist M direkte Summe von R-Moduln M_i, $M=\bigoplus_{i=1}^{p} M_i$, dann bezeichnen wir ein Polynomgesetz $\{F_S\}$ als *multihomogen vom Multigrad* $(n_1, \ldots, n_p)$, wenn für alle $S\in\mathfrak{R}$, $z_i\in M_i\otimes_R S$ und $r_i\in S$ gilt:

$$F_S(z_1r_1+\cdots+z_pr_p) = F_S(z_1+\cdots+z_p)\cdot r_1^{n_1}\cdots r_p^{n_p}.$$

Sei $M = \bigoplus_{i=1}^{p} M_i$ und $z = z_1 + \cdots + z_p$ die eindeutige Darstellung eines Elementes aus $M \otimes_R S$ mit $z_i \in M_i \otimes_R S$; betrachten wir das Element

$$\bar{z} := z_1 \otimes T_1 + \cdots + z_p \otimes T_p$$

aus $(M \otimes_R S) \otimes_S S[T]$.

Für ein Polynomgesetz $\{F_S\}$ auf (M, N) gilt:

$$F_{S[T]}(\bar{z}) = \sum_{n_1,\ldots,n_p} a_{n_1,\ldots,n_p} \otimes T_1^{n_1} \cdots T_p^{n_p}$$

mit eindeutig bestimmten $a_{n_1,\ldots,n_p}$ aus $N \otimes_R S$. Durch die Definition

$$(F_{n_1,\ldots,n_p})_S(z) := a_{n_1,\ldots,n_p}$$

wird für jedes p-Tupel $(n_1, \ldots, n_p)$ ein multihomogenes Polynomgesetz $\{(F_{n_1,\ldots,n_p})_S\}$ über (M, N) mit Multigrad $(n_1, \ldots, n_p)$ bestimmt.

Folgerung (1. 1). Jedes Polynomgesetz auf (M, N) kann als lokal endliche Summe seiner (eindeutig bestimmten) multihomogenen Komponenten geschrieben werden (Roby [12], Proposition I. 4).

Als *Polarisation* bezeichnet man folgendes Verfahren, bei dem mit Hilfe eines Polynomgesetzes auf (M, N) ein Polynomgesetz auf $\left(\bigoplus_p M, N\right)$ bestimmt wird: Betrachten wir für $p \geqq 1$ den Modul $\bigoplus_p M = M \oplus \cdots \oplus M$, und bezeichne $m^{(i)}$ die Projektion auf den i-ten Summanden von $\bigoplus_p M$. Als Modulhomomorphismus bestimmt $m^{(i)}$ ein Polynomgesetz $\{m_S^{(i)}\}$ auf $\left(\bigoplus_p M, M\right)$. Die Summe dieser Polynomgesetze gibt das Polynomgesetz $\left\{\sum_{i=1}^{p} m_S^{(i)}\right\}$ auf $\left(\bigoplus_p M, M\right)$.

Definition (1. 5). Ist $\{F_S\}$ ein Polynomgesetz auf (M, N), so nennen wir das durch Hintereinanderausführung von $\left\{\sum_{i=1}^{p} m_S^{(i)}\right\}$ und $\{F_S\}$ definierte Polynomgesetz auf $\left(\bigoplus_p M, N\right)$ die *Polarisierte der Ordnung p* von $\{F_S\}$ und schreiben dafür $\{\Pi_p F_S\}$.

Für $S \in \mathfrak{R}$ und $z_i \in M_i \otimes_R S$ gilt also

$$\Pi_p F_S(z_1, \ldots, z_p) = F_S(z_1 + \cdots + z_p).$$

Die multihomogene Komponente von $\{\Pi_p F_S\}$ mit Multigrad $(k_1, \ldots, k_p)$ bezeichnen wir mit $\{\Pi F_S^{(k_1,\ldots,k_p)}\}$. Für $x_i \otimes s_i \in M \otimes_R S$ hat man somit:

$$F_S(x_1 \otimes s_1 + \cdots + x_p \otimes s_p) = \sum_{k_1,\ldots,k_p} \Pi F_R^{(k_1,\ldots,k_p)}(x_1, \ldots, x_p) \otimes s_1^{k_1} \cdots s_p^{k_p},$$

wobei über alle p-Tupel $(k_1, \ldots, k_p)$ mit $k_i \geqq 0$ zu summieren ist. Ist $\{F_S\}$ homogen vom Grad n, so ist $\{\Pi_p F_S\}$ homogen vom gleichen Grad: aus $\Pi F_S^{(k_1,\ldots,k_p)} \neq 0$ folgt $k_1 + \cdots + k_p = n$. In obiger Darstellung ist dann nur über solche p-Tupel zu summieren, für die $k_1 + \cdots + k_p = n$ gilt (vgl. Bergmann [1], S. 131).

Folgerung (1. 2). Ist $\{F_S\}$ ein homogenes Polynomgesetz vom Grad n auf (M, R), also speziell mit Werten im Grundring, so wird für $S \in \mathfrak{R}$ durch

$$\beta_S^{(z)}(\bar{a}, \bar{b}) := \Pi F_S^{(1,n-1)}(\bar{a}, z) \cdot \Pi F_S^{(1,n-1)}(\bar{b}, z) - F_S(z) \cdot \Pi F_S^{(1,1,n-2)}(\bar{a}, \bar{b}, z),$$

$z, \bar{a}, \bar{b} \in M \otimes_R S$, eine symmetrische Bilinearform auf $M \otimes_R S$ definiert.

Ist $\bar{a} = a \otimes s_1$, $\bar{b} = b \otimes s_2$, $z = x \otimes 1_S$ mit $a, b, x \in M$, $s_1, s_2 \in S$, so gilt $\beta_S^{(x\otimes 1)}(a \otimes s_1, b \otimes s_2) = \beta_R^{(x)}(a, b) \otimes s_1 s_2$. Es ist also $\beta_S^{(x\otimes 1)}$ die übliche Fortsetzung der Bilinearform $\beta_R^{(x)}$ auf M zu einer Bilinearform auf $M \otimes_R S$ (vgl. § 2).

Definition (1. 6). Als *Differential* (erster Ordnung) eines Polynomgesetzes $\{F_S\}$ auf (M, N) bezeichnen wir das Polynomgesetz $\{DF_S\}$ auf $(M \oplus M, N)$, das definiert ist durch die lokal endliche Summe $DF_S := \sum_{p=0}^{\infty} \Pi F_S^{(p,1)}$. Für $z_1, z_2 \in M \otimes_R S$ ist nach Definition $DF_S(z_1, z_2)$ der Koeffizient von T in $F_{S[T]}(z_1 + z_2 \otimes T)$.

§ 2. Nichtausgeartete und nichtsinguläre Bilinearformen

Sei β eine symmetrische Bilinearform auf dem R-Modul M. Wenn $\beta(a, b) = 0$ nur dann für alle $b \in M$ gilt, falls $a = 0$, so heißt β *nichtausgeartet*. Dies ist gleichbedeutend damit, daß die R-lineare Abbildung ϱ:

$$\varrho : M \to \mathrm{Hom}_R(M, R) = M^*, \; x \to \beta(x, .),$$

monomorph ist. Ist ϱ ein Isomorphismus von M auf M^*, so nennen wir β *nichtsingulär*[1]).

Sei zum Beispiel M ein freier Modul über R mit endlicher Basis $u_1, \ldots, u_n$. Die Determinante der (n, n)-Matrix $\{\beta(u_i, u_j)\}$ nennt man die *Diskriminante* der Bilinearform β bezüglich der Basis $u_1, \ldots, u_n$. Dann gilt:

(2. 1) Die Diskriminante D von β ist genau dann invertierbar in R, wenn β nichtsingulär ist.

(2. 2) D ist genau dann kein Nullteiler in R, wenn β nichtausgeartet ist.

Die erste Behauptung ist in Bourbaki [5], S. 44 beweisen. Zum Beweis von (2. 2) überlegt man sich, daß $x = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ genau dann in der Ausartungsmenge von β liegt, wenn $\sum_{i=1}^{n} \beta(u_i, u_j) x_j = 0$ für $j = 1, \ldots, n$ gilt. Dies bedeutet die Lösbarkeit eines linearen homogenen Gleichungssystems. Nach Satz 51 in McCoy [8] gibt es genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante von $\{\beta(u_i, u_j)\}$ ein Nullteiler in R ist.

Für eine R-Algebra $S \in \mathfrak{R}$ wird durch

$$\bar{\beta}(a \otimes s, \; b \otimes t) := \beta(a, b) \otimes st \quad (a, b \in M; \; s, t \in S)$$

eindeutig eine Bilinearform $\bar{\beta}$ auf $M \otimes_R S$ festgelegt. Ist β nichtausgeartet oder nichtsingulär, so braucht dies nicht auch für die Fortsetzung $\bar{\beta}$ zu gelten. Für spezielle S gilt:

(2. 3) Ist M endlich erzeugt, β nichtausgeartet und $S \in \mathfrak{R}$ als R-Modul flach, so ist auch $\bar{\beta}$ nichtausgeartet auf $M \otimes_R S$.

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist mit $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varrho} M^*$ auch die Folge $0 \longrightarrow M \otimes_R S \xrightarrow{\varrho \otimes \mathrm{id}} M^* \otimes_R S$ exakt. Der kanonische Homomorphismus

$$\omega : M^* \otimes_R S \to (M \otimes_R S)^* \text{ mit } \omega(u \otimes 1_S) = u \otimes \mathrm{id}_S$$

ist injektiv (Bourbaki [4], Proposition 11, S. 39). Damit ist $\omega \circ (\varrho \otimes \mathrm{id}_S)$ injektiv; dies entspricht aber gerade der Abbildung $\bar{\varrho} : M \otimes_R S \to (M \otimes_R S)^*, \; z \to \bar{\beta}(z, .)$.

Für ein maximales Ideal $\mathfrak{m}$ von R bezeichne $R_{\mathfrak{m}}$ wie üblich den Quotientenring von R bezüglich $R - \mathfrak{m}$. Der Modul $R_{\mathfrak{m}}$ ist ein flacher R-Modul. Aus (2. 3) und dem Lokal-Global-Prinzip folgt dann:

(2. 4) Ist M endlich erzeugt, so ist β genau dann nichtausgeartet, wenn für alle maximalen Ideale $\mathfrak{m}$ von R die Fortsetzung $\bar{\beta}$ auf $M \otimes_R R_{\mathfrak{m}}$ nichtausgeartet ist.

Sei nun M endlich erzeugt und *projektiv*. Für alle $S \in \mathfrak{R}$ ist dann $(M \otimes_R S)^*$ isomorph zu $M^* \otimes_R S$ und es gilt:

---

[1]) Bei einem endlich erzeugten Modul über einem (kommutativen) Quasifrobeniusring sind für β nichtausgeartet und nichtsingulär gleichwertige Forderungen (Satz von Morita-Tachikawa, vgl. Curtis-Reiner [5], S. 397). Im allgemeinen sind sie jedoch verschieden.

(2. 5) Ist β nichtsingulär, so ist für jedes $S \in \mathfrak{R}$ die Fortsetzung $\bar{\beta}$ eine nichtsinguläre Bilinearform auf $M \otimes_R S$;

(2. 6) β ist genau dann nichtsingulär, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R die Fortsetzung auf $M \otimes_R R_{\mathfrak{m}}$ nichtsingulär ist;

(2. 7) β ist genau dann nichtsingulär, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R die Fortsetzung auf $M \otimes_R R/\mathfrak{m}$ nichtausgeartet ist.

II. Homogene Polynomgesetze auf Algebren

Seien nun A und B Algebren über dem Ring R. Gilt für jedes $S \in \mathfrak{R}$

$$F_S(xy) = F_S(x) F_S(y) \quad \text{für alle } x, y \text{ aus } A \otimes_R S,$$

so nennen wir das Polynomgesetz $\{F_S\}$ auf (A, B) *multiplikativ*. Beispiele für multiplikative homogene Polynomgesetze liefern wiederum die multiplikativen Formen von Bergmann [2], die in Baumgartner [1] behandelt werden.

McCrimmon hat in [9] und [10] untersucht, welche Eigenschaften Algebren über Körpern haben, auf denen eine Form (= homogene Polynomfunktion) mit allgemeinerem Kompositionsgesetz gegeben ist. Wir wollen der entsprechenden Frage bei Algebren über Ringen nachgehen.

Mit A meinen wir künftig immer eine R-Algebra mit Einselement e, deren Multiplikation, falls nicht anders vorausgesetzt, weder kommutativ noch assoziativ zu sein braucht. Wir nennen A *streng potenzassoziativ*, wenn $A \otimes_R S$ für jedes $S \in \mathfrak{R}$ eine potenzassoziative Algebra ist. Mit $\mathrm{End}_R A$ wird der Modul der R-linearen Abbildungen von A in sich bezeichnet.

§ 3. Homogene Polynomgesetze mit C-Komposition

Ist $\{G_S\}$ ein Polynomgesetz auf $(A, \mathrm{End}_R A)$ und bezeichnet

$$\omega_S : (\mathrm{End}_R A) \otimes_R S \to \mathrm{End}_S(A \otimes_R S)$$

den kanonischen Homomorphismus mit $\omega_S(u \otimes 1_S) = u \otimes \mathrm{id}_S$ für $u \in \mathrm{End}_R A$, so ist $\bar{G}_S := \omega_S \circ G_S$ eine Abbildung von $A \otimes_R S$ in $\mathrm{End}_S(A \otimes_R S)$. Sei

$$\delta_S : \big(\mathrm{End}_S(A \otimes_R S),\ A \otimes_R S\big) \to A \otimes_R S$$

die Auswertung, definiert durch $\delta_S(l, z) := l(z)$ für $l \in \mathrm{End}_S(A \otimes_R S)$, $z \in A \otimes_R S$ und $\psi_S : \mathrm{End}_S(A \otimes_R S) \to A \otimes_R S$ definiert durch $\psi_S(l) := l(e \otimes 1_S)$.

Für $a \in A$ sind $L_a : A \to A$, $L_a(x) := ax$ und $R_a : A \to A$, $R_a(x) := xa$, R-Modulhomomorphismen von A in sich, also $R_a, L_a \in \mathrm{End}_R A$.

Definition (3. 1). *C-Komposition*: $\{G_S\}$, $\{H_S\}$ seien Polynomgesetze auf $(A, \mathrm{End}_R A)$ mit den Eigenschaften $(a \in A)$:

(1) $G_R(e) = H_R(e) = \mathrm{id}_A$,

(2) $DG_R(e, a) = \pi \cdot L_a$,

(3) $DH_R(e, a) = \tau \cdot R_a$,

mit invertierbaren Elementen $\pi, \tau \in R$.

Ist $\{F_S\}$ ein homogenes Polynomgesetz auf (A, R) vom Grad n, so sagen wir $\{F_S\}$ *erlaubt C-Komposition* (bezüglich $\{G_S\}$ und $\{H_S\}$), wenn folgendes gilt:

I. $F_R(e) = 1$;

II. für jedes $S \in \mathfrak{R}$ ist folgendes Diagramm für $P_S = G_S$ und $P_S = H_S$ kommutativ (μ_S = Multiplikation in S):

$$\begin{array}{ccccc}
(A \otimes S,\ A \otimes S) & & & & \\
\big\downarrow{\scriptstyle (\overline{P}_S,\, \mathrm{id}_{A\otimes S})} & & & & \\
(\mathrm{End}(A \otimes S),\ A \otimes S) & & \xrightarrow{\qquad\qquad \delta_S \qquad\qquad} & & A \otimes S \\
\big\downarrow{\scriptstyle (\psi_S,\, \mathrm{id}_{A\otimes S})} & & & & \big\downarrow \\
(A \otimes S,\ A \otimes S) & \xrightarrow[(F_S, F_S)]{} & (R \otimes S,\ R \otimes S) & \xrightarrow[\mu_S]{} & R \otimes S
\end{array}$$

Es muß also für $a, b \in A \otimes_R S$, $P_S = G_S$ und $P_S = H_S$ gelten:

$$F_S(\overline{P}_S(a)\{b\}) = F_S(\overline{P}_S(a)\{e \otimes 1_S\}) \cdot F_S(b).$$

Definition (3. 2). Erlaubt das homogene Polynomgesetz $F := \{F_S\}$ (vom Grad n) auf (A, R) C-Komposition, so nennen wir (A, F) eine *C-Kompositionsalgebra* (vom Grad n).

Genau genommen müßte man auch die dazugehörigen Polynomgesetze $\{G_S\}$ und $\{H_S\}$ angeben, doch werden diese nur bei der Herleitung der Spurmultiplikationsformel explizit auftreten.

Ist F multiplikativ, so erlaubt F C-Komposition bezüglich $\overline{G}_S(a) = L_a$ und $\overline{H}_S(a) = R_a$ ($a \in A \otimes_R S$) mit $\pi = \tau = 1$.

Die Anforderungen an $\{G_S\}$ und $\{H_S\}$ werden auch durch die homogenen Polynomgesetze $G_S(a) = 2R_aL_a - L_{a^2}$ und $H_S(a) = 2L_aR_a - R_{a^2}$ mit $\pi = \tau = 2$ erfüllt. Ist A kommutativ, so entspricht dies der Kompositionseigenschaft der Normform von endlichdimensionalen Jordanalgebren über Körpern. Ein Beispiel mit nichthomogenen $\{G_S\}$ und $\{H_S\}$ geben die quasi-assoziativen Algebren. Dies ist in McCrimmon [9], S. 928, ausgeführt.

Spurmultiplikation. Seien nun (A, F) eine C-Kompositionsalgebra und $\{G_S\}$, $\{H_S\}$ die zur Komposition gehörenden Polynomgesetze auf $(A, \mathrm{End}_R A)$. Ist T eine Unbestimmte über $S \in \mathfrak{R}$ und $a \in A \otimes_R S$, so haben wir:

$$\begin{aligned}
G_{S[T]}(e \otimes 1_S + a \otimes T) = \sum_{p,k \geq 0} \Pi G_{S[T]}^{(p,k)}(e \otimes 1_S,\ a \otimes T) = G_S(e \otimes 1_S) \\
+ DG_S(e \otimes 1_S, a) \otimes T + \sum_{p \geq 0, k \geq 2} \Pi G_S^{(p,k)}(e \otimes 1_S, a) \otimes T^k;
\end{aligned}$$

die Anwendung auf $x \in A \otimes_R S$ ergibt:

$$\overline{G}_{S[T]}(e \otimes 1_S + a \otimes T)\{x\} = x + \pi \cdot ax \otimes T + f(a, x) \otimes T^2$$

mit geeignetem Element $f(a, x)$ aus $A \otimes_R S[T]$.

Für das Polynomgesetz F erhalten wir damit:

$$\begin{aligned}
F_{S[T]}(\overline{G}_S(e \otimes 1_S + a \otimes T)\{x\}) &= F_{S[T]}(x + \pi \cdot ax \otimes T + f(a, x) \otimes T^2) \\
&= \sum_{\nu+\mu+\lambda=n} \Pi F_{S[T]}^{(\nu,\mu,\lambda)}(x, \pi \cdot ax, f(a, x)) \cdot T^\mu T^{2\lambda};
\end{aligned}$$

wegen der Kommutativität des Diagramms in Definition (3. 1) muß dies gleich sein mit

$$\begin{aligned}
& F_{S[T]}(\overline{G}_S(e \otimes 1_S + a \otimes T)\{e \otimes 1_S\}) \cdot F_{S[T]}(x) \\
&= F_{S[T]}(e \otimes 1_S + \pi \cdot a \otimes T + f(a, e) \otimes T^2) \cdot F_{S[T]}(x) \\
&= F_S(x) \cdot \sum_{\nu+\mu+\lambda=n} \Pi F_{S[T]}^{(\nu,\mu,\lambda)}(e \otimes 1_S, \pi \cdot a, f(a, e)) \cdot T^\mu T^{2\lambda}.
\end{aligned}$$

Vergleichen wir nun die Koeffizienten von T, also speziell für $\mu = 1$, $\nu = n - 1$, $\lambda = 0$, so ergibt sich:

$$\pi \cdot \Pi F_S^{(n-1,1)}(x, ax) = \pi \cdot F_S(x) \cdot \Pi F_S^{(n-1,1)}(e \otimes 1_S, a).$$

Führt man die gleiche Rechnung mit $\{H_S\}$ durch, so bekommt man schließlich für $a, x \in A \otimes_R S$:

$$F_S(x) \cdot \Pi F_S^{(1,n-1)}(a, e \otimes 1_S) = \Pi F_S^{(1,n-1)}(xa, x) = \Pi F_S^{(1,n-1)}(ax, x). \tag{3.1}$$

Die Linearform $a \mapsto \Pi F_R^{(1,n-1)}(a, e)$ wird als die zur *Form* F_R *gehörige Spur* bezeichnet. Gelten für F die Beziehungen (3.1), so sagen wir, F erlaubt *Spurmultiplikation.*

Sind $T_1, \ldots, T_p$ Unbestimmte über R und $\bar{x} = x_1 \otimes T_1 + \cdots + x_p \otimes T_p$, $\bar{a} = a \otimes 1$ mit $a, x_i \in A$, so folgt aus (3.1):

$$\begin{aligned} &F_{R[T]}(\bar{x}) \cdot \Pi F_{R[T]}^{(1,n-1)}(\bar{a}, e \otimes 1) \\ &\quad = \Big[\sum_{\lambda_1 + \cdots + \lambda_p = n} \Pi F_R^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_p)}(x_1, \ldots, x_p) \otimes T_1^{\lambda_1} \cdots T_p^{\lambda_p} \Big] \Pi F_{R[T]}^{(1,n-1)}(\bar{a}, e \otimes 1) \\ &\quad = \Pi F_{R[T]}^{(1,n-1)}(\bar{a}\bar{x}, \bar{x}) = \sum_{i=1}^{p} \Pi F_{R[T]}^{(1,n-1)}(ax_i \otimes T_i, \bar{x}) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{p} \sum_{\nu_1 + \cdots + \nu_p = n} \Pi F_R^{(1,\nu_1,\ldots,\nu_i - 1,\ldots,\nu_p)}(ax_i, x_1, \ldots, x_p) \otimes T_1^{\nu_1} \cdots T_p^{\nu_p}; \end{aligned}$$

dabei kann ohne Einschränkung $\lambda_i \geqq 1$ und $\nu_i \geqq 1$ angenommen werden.

Durch Vergleich der entsprechenden Koeffizienten bekommen wir ($\nu_i \geqq 1$):

$$\begin{aligned} &\Pi F_R^{(\nu_1,\ldots,\nu_p)}(x_1, \ldots, x_p) \cdot \Pi F_R^{(1,n-1)}(a, e) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{p} \Pi F_R^{(1,\nu_1,\ldots,\nu_i - 1,\ldots,\nu_p)}(x_i a, x_1, \ldots, x_p) \\ &\quad = \sum_{i=1}^{p} \Pi F_R^{(1,\nu_1,\ldots,\nu_i - 1,\ldots,\nu_p)}(ax_i, x_1, \ldots, x_p). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Spurbilinearform. In Folgerung (1.2) wurde durch ein homogenes Polynomgesetz jedem $z \in A \otimes_R S$ eine Bilinearform auf $A \otimes_R S$ zugeordnet. Die dem Einselement von A zugeordnete (symmetrische) Bilinearform $\beta_R^{(e)}$ bezeichnen wir als die zu F_R gehörige *Spurbilinearform* $(=: \beta_R)$.

Hilfssatz (3.1). *Ist (A, F) eine C-Kompositionsalgebra, so ist die zu F_R gehörige Spurbilinearform assoziativ und läßt sich schreiben als $\beta_R(a, b) = \Pi F_R^{(1,n-1)}(ab, e)$ für $a, b \in A$.*

Beweis. Aus Formel (3.2) folgt

$$\Pi F_R^{(1,n-1)}(a, e) \cdot \Pi F_R^{(1,n-1)}(b, e) = \Pi F_R^{(1,n-1)}(ab, e) + \Pi F_R^{(1,1,n-2)}(a, b, e).$$

Wegen $F_R(e) = 1$ ist damit die angegebene Darstellung von β_R bestätigt. Aus (3.2) und der Assoziativität von R bekommt man damit für alle $a, b, c \in A$

$$0 = \{\beta_R(a, e) \cdot \beta_R(b, e)\} \cdot \beta_R(c, e) - \beta_R(a, e) \cdot \{\beta_R(b, e) \cdot \beta_R(c, e)\} = \beta_R(ab, c) - \beta_R(a, bc);$$

also ist β_R assoziativ.

Für $S \in \mathfrak{R}$ gilt übrigens der Hilfssatz entsprechend für die zu F_S gehörige Spurbilinearform β_S.

Hilfssatz (3.2). *Sei (A, F) eine streng potenzassoziative C-Kompositionsalgebra. Ist z ein nilpotentes Element von $A \otimes_R S$, so ist auch $\beta_S(z, e \otimes 1_S)$ nilpotent.*

Beweis. Berechnet man $\beta_S(z, e \otimes 1_S)^t = \Pi F_S^{(1,n-1)}(z, e \otimes 1_S)^t$ durch wiederholte Anwendung von (3. 2), so erhält man Summanden der Form $k \cdot \Pi F_S^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}(z^{\lambda_1}, \ldots, z^{\lambda_n})$ mit geeigneten Koeffizienten k und $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = t$. Ist z nilpotent, so werden, wegen der Multilinearität, für genügend großes t diese Ausdrücke alle Null.

Für ein eigentlich nilpotentes Element x von $A \otimes_R S$ ist demzufolge $\beta_S(x, y)$ nilpotent für alle $y \in A \otimes_R S$.

§ 4. Struktur von C-Kompositionsalgebren

Ist (A, F) eine potenzassoziative C-Kompositionsalgebra, dann heißt A *speziell algebraisch*, kurz *s-algebraisch*, wenn für alle $a \in A$ gilt (vgl. Bergmann [2]):

$$P(a) := \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \Pi F_R^{(\nu,n-\nu)}(a, e) \cdot a^{n-\nu} = 0.$$

Satz (4. 1). *Ist* (A, F) *eine potenzassoziative C-Kompositionsalgebra und die zu* F_R *gehörige Spurbilinearform* β_R *nichtausgeartet, dann ist A s-algebraisch.*

Beweis. Wir wollen zeigen, daß $P(a)$ in der Ausartungsmenge von β_R liegt, d. h. $\beta_R(P(a), x) = 0$ für alle $x \in A$. Es bezeichne L_a wieder die Linksmultiplikation mit $a \in A$:

$$\begin{aligned}\Pi F_R^{(1,n-1)}(P(a)x, e) &= \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \Pi F_R^{(\nu,n-\nu)}(a, e) \cdot \Pi F_R^{(1,n-1)}(L_a^{n-\nu} x, e) \\ &= \Pi F_R^{(1,n-1)}(L_a^n x, e) + \sum_{\nu=1}^{n-1} (-1)^\nu \{\Pi F_R^{(1,\nu,n-\nu)}(L_a^{n-\nu} x, a, e) + \Pi F_R^{(1,\nu-1,n-\nu)}(L_a^{n-\nu+1} x, a, e)\} \\ &\quad + (-1)^n F_R(a) \cdot \Pi F_R^{(1,n-1)}(x, e) = (-1)^{n-1} \Pi F_R^{(1,n-1)}(L_a x, a) \\ &\quad + (-1)^n F_R(a) \cdot \Pi F_R^{(1,n-1)}(x, e) = 0;\end{aligned}$$

dabei wurde zunächst die R-Linearität in der ersten Komponente von $\Pi F_R^{(1,n-1)}$ und dann die Multiplikationsformel (3. 2) ausgenutzt.

Folgende Eigenschaften ergeben sich direkt aus den Beweisen der entsprechenden Sachverhalte im Falle von Algebren über Körpern mit assoziativer Bilinearform (*trace form*, vgl. Schafer [14], Theorem 5. 4):

Ist A streng potenzassoziativ und die Spurbilinearform β_R der C-Kompositionsalgebra (A, F) nichtausgeartet, dann gilt:

(1) A ist eine flexible Algebra, d. h. $(xy)x = x(yx)$ für alle $x, y \in A$;

(2) ist A kommutativ und 5 kein Nullteiler im Grundring R, so ist A eine Jordanalgebra, d. h. $x^2(xy) = x(x^2 y)$;

(3) ist 2 invertierbar und 5 kein Nullteiler in R, so ist A eine nicht-kommutative Jordanalgebra.

Separabilität. Eine endlichdimensionale (nicht-assoziative) Algebra über einem Körper K heißt separabel über K, wenn für jeden Erweiterungskörper L von K die Algebra $A \otimes_K L$ direkte Summe von einfachen Idealen ist (Schafer [14], S. 58).

Definition (4. 1). Eine als Modul endlich erzeugte (nicht-assoziative) Algebra A über einem Ring R nennen wir *separabel über R*, wenn für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R die Algebra $A \otimes_R R/\mathfrak{m}$ separabel über dem Körper $R/\mathfrak{m}$ ist.

Für assoziative Algebren A entspricht dies dem von Auslander und Goldman eingeführten Separabilitätsbegriff von Algebren über Ringen (vgl. DeMeyer-Ingraham [7], Theorem 7. 1).

In Müller [11] wird eine nicht-assoziative Algebra A über einem Ring R, die als R-Modul endlich erzeugt und projektiv ist, „separabel" genannt, wenn ihre Multiplikationsalgebra $M(A)$ eine separable (assoziative) Algebra im Sinne von Auslander-Goldman ist. Wegen Satz 4 in [11] stimmt diese Definition mit unserer Definition 4. 1 überein, falls A als R-Modul endlich erzeugt und projektiv und $M(A)$ als R-Modul endlich erzeugt ist[2]).

Unter geeigneten Voraussetzungen über die Modulstruktur der Algebra A läßt sich nun zeigen:

Satz (4. 2). *Sei (A, F) eine C-Kompositionsalgebra über dem Ring R und A als R-Modul endlich erzeugt und projektiv. Ist die zu F_R gehörige Spurbilinearform nichtsingulär, so ist A eine separable Algebra über R.*

Beweis. Nach (2. 7) ist $\beta_{R/\mathfrak{m}}$ für jedes maximale Ideal $\mathfrak{m}$ von R eine nichtausgeartete Bilinearform auf $A \otimes_R R/\mathfrak{m}$ mit Werten im Körper $R/\mathfrak{m} =: K$.

Ist z ein eigentlich nilpotentes Element in $A \otimes_R K$, so gilt nach Hilfssatz (3. 2) $\beta_K(z, x) = 0$ für alle $x \in A \otimes_R K$, also $z = 0$. Es gibt demzufolge keine nichttrivialen nilpotenten Ideale in $A \otimes_R K$. Nach einem Satz von Dieudonné (Schafer [14], Theorem 2. 6) ist eine endlichdimensionale Algebra (über einem Körper) mit einer nichtausgearteten assoziativen Bilinearform direkte Summe von einfachen Idealen, falls sie keine nilpotenten Ideale enthält. Wegen (2. 7) und Hilfssatz (3. 2) bleiben die Voraussetzungen für den Satz von Dieudonné bei beliebigen Körpererweiterungen von K erhalten. $A \otimes_R K$ ist also separabel über K. Dann ist A gemäß Definition (4. 1) separabel über R.

Ein (kommutativer) Ring heißt (von Neumann-)*regulär*, wenn für alle $r \in R$ die Gleichung $rxr = r$ mit $x \in R$ lösbar ist. Über einem regulären Ring ist jeder Modul flach. Mit dieser starken Forderung an den Grundring gilt

Satz (4. 3). *Ist (A, F) eine C-Kompositionsalgebra über einem regulären Ring R, A als R-Modul endlich erzeugt und die Spurbilinearform β_R nichtausgeartet, so ist A separabel über R.*

Der Beweis läßt sich unter Verwendung von (2. 3) genau wie bei Satz (4. 2) führen.

Die für endlichdimensionale, assoziative Algebren über Körpern bekannte Charakterisierung von „separabel" durch die Diskriminante der Spurbilinearform der Hauptnorm (vgl. Bergmann [3], S. 177) hat in unserem Fall folgendes Analogon:

Satz (4. 4). *Ist A ein freier R-Modul mit endlicher Basis $u_1, \ldots, u_k$, so ist eine C-Kompositionsalgebra (A, F) separabel über R, falls* det $\{\beta_R(u_i, u_j)\}$ *invertierbar ist in R.*

Der *Beweis* folgt direkt aus (2. 1) und Satz (4. 2).

Einen Fall, in dem A nicht separabel über R zu sein braucht, aber für eine geeignete Ringerweiterung Q die Algebra $A \otimes_R Q$ separabel über Q wird, beschreibt der

Satz (4. 5). *Hat A eine endliche Basis $u_1, \ldots, u_k$ und ist die Spurbilinearform β_R der C-Kompositionsalgebra (A, F) nichtausgeartet, so gibt es (mindestens) einen Erweiterungsring Q von R, so daß $A \otimes_R Q$ separabel über Q ist.*

Beweis. Nach (2. 2) ist die Diskriminante D von β_R kein Nullteiler in R. Ist Q eine Ringerweiterung von R, in der D invertierbar ist, zum Beispiel der volle Quotientenring von R, so ist die Diskriminante von $\beta_Q (= D)$ invertierbar in Q, also β_Q nichtsingulär.

Nilradikal. Endlichdimensionale, assoziative Algebren über Körpern K sind bekanntlich genau dann separabel, wenn für jede Körpererweiterung L von K das Radikal

[2]) Die in [11], Satz 4 gemachte Voraussetzung, daß $M(A)$ als R-Modul projektiv sein soll, ist nicht notwendig (vgl. [7], Theorem 7. 1).

von $A \otimes_K L$ gleich Null ist. Separable Algebren über Ringen können dagegen durchaus nichttriviale Nilideale enthalten. Bei den hier betrachteten Algebren A hat das Nilradikal ($=$ maximales Nilideal $=:$ Rad A) eine spezielle Gestalt:

Satz (4. 6). *Sei (A, F) eine streng potenzassoziative C-Kompositionsalgebra über dem Ring R und A als R-Modul endlich erzeugt und projektiv. Ist die Spurbilinearform β_R nichtsingulär, so gilt für alle $S \in \mathfrak{R}$:*

$$\operatorname{Rad}(A \otimes_R S) = A \otimes_R \operatorname{Rad} S.$$

Beweis. Unter den gegebenen Voraussetzungen ist die Fortsetzung von β_R auf $A \otimes_R S/\operatorname{Rad} S$ nichtsingulär. Da $S/\operatorname{Rad} S$ keine nilpotenten Elemente enthält, ist nach Hilfssatz (3. 2) das Nilradikal von $A \otimes_R S/\operatorname{Rad} S \cong (A \otimes_R S)/(A \otimes_R \operatorname{Rad} S)$ gleich Null. $\operatorname{Rad}(A \otimes_R S)$ ist aber das kleinste Ideal B in $A \otimes_R S$, für das $(A \otimes_R S)/B$ kein Nilradikal enthält, also $A \otimes_R \operatorname{Rad} S \geqq \operatorname{Rad}(A \otimes_R S)$. Da andrerseits offensichtlich

$$A \otimes_R \operatorname{Rad} S \leqq \operatorname{Rad}(A \otimes_R S)$$

gilt, ist damit der Satz bewiesen.

Bemerkung. Die Sätze in § 4 bleiben übrigens gültig, wenn für das homogene Polynomgesetz F auf (A, R) an Stelle der C-Komposition nur verlangt wird, daß *Spurmultiplikation* (Formel (3. 1) oder (3. 2)) möglich ist.

Literatur

[1] *E. Baumgartner*, Über Kompositionsalgebren beliebigen Grades, Dissertation Düsseldorf 1970.

[2] *A. Bergmann*, Formen auf Moduln über kommutativen Ringen beliebiger Charakteristik, J. reine angew. Math. **219** (1965).

[3] *A. Bergmann*, Hauptnorm und Struktur von Algebren, J. reine angew. Math. **222** (1966).

[4] *N. Bourbaki*, Algèbre commutative, Chap. 1, 2, Paris 1961.

[5] *N. Bourbaki*, Algèbre, Chap. 9, Paris 1959.

[6] *Curtis-Reiner*, Representation theory of finite groups, and associative algebras, New York 1966.

[7] *DeMeyer-Ingraham*, Separable algebras over commutative rings, Lecture Notes **181**, Berlin-Heidelberg-New York 1971.

[8] *N. H. McCoy*, Rings and Ideals, The Carus Math. Monographs No. 8, 1948.

[9] *K. McCrimmon*, Norms and noncommutative Jordan algebras, Pacific J. Math. **15** (1965).

[10] *K. McCrimmon*, A proof of Schafer's conjecture for infinite-dimensional forms admitting composition, J. Algebra **5** (1967).

[11] *N. Müller*, Nicht assoziative separable Algebren über Ringen, erscheint in Abh. d. Univ. Hamburg.

[12] *M. N. Roby*, Lois polynomes et lois formelles en théorie des modules, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3 série, **80** (1963).

[13] *R. D. Schafer*, Cubic Forms permitting a new type of composition. J. Math. Mech. **10** (1961).

[14] *R. D. Schafer*, An introduction to nonassociative algebras, New York, London 1966.

---

4 Düsseldorf, Universitätsstr. 1

Eingegangen 25. April 1973