

Homologische Algebra

mit Anwendungen in der Algebraischen Topologie

Modul „Spezielle Themen der Algebra und Geometrie“

Sommersemester 2016

Vorlesung: dienstags, 10:30 Uhr

Übung: montags, 15:15 Uhr (Raum 25.22.01.81)

Die Vorlesung verfolgt mindestens zwei Ziele: sie soll in einige grundlegende Konzepte der Homologischen Algebra einführen, und sie soll einige Themen aus der Vorlesungsreihe Topologie I/II vertiefen. Soweit wie möglich werden diese Ziele derart miteinander verbunden, dass neben den ehemaligen Hörern der Topologie auch diejenigen glücklich werden, die vor einem anderen Hintergrund den Weg in diese Vorlesung finden.

In der nachfolgenden Übersicht sind die für die algebraische Topologie besonders relevanten Vorträge jeweils mit einem \star gekennzeichnet:

\star = In diesem Vortrag werden Anwendungen in der Algebraischen Topologie als die wichtigsten Beispielen diskutiert.

$\star\star$ = Ohne Grundkenntnisse über die in der Topologie I/II behandelte (Ko)Homologie topologischer Räume ist dieser Vortrag unverständlich.

Teil I: derivierte Funktoren

1	Abelsche Kategorien	12.04.
2	Projektive Auflösungen	19.04.
3	Linksderivierte Funktoren	26.04.
4	Injektive Auflösungen und rechtsderivierte Funktoren	03.05.
5	Beispiel: Hom & Ext	10.05.
6	Beispiel: Gruppenhomologie	17.05.
7	Homologie von Eilenberg-MacLane-Räumen $K(\pi, 1)$ $\star\star$	24.05.
8	Beispiel: der inverse Limes \star	31.05.

Teil II: Spektralsequenzen

9	Spektralsequenzen – eine Einführung	07.06.
10	Spektralsequenzen – Terminologie	14.06.
11	Spektralsequenz eines filtrierten Komplexes	21.06.
12	Spektralsequenz eines Bikomplexes – Anwendungen	28.06.
13	Die Künneth-Spektralsequenz	05.07.
14	Serre-Spektralsequenz für Homologie $\star\star$	12.07.
15	Serre-Spektralsequenz für Kohomologie $\star\star$	19.07.

Teil I: derivierte Funktoren

- 1 Abelsche Kategorien** 12.04.
Additive und abelsche Kategorien, Einbettungssatz, exakte Sequenzen
[Vak15, I.1.6 (Seiten 47–56)]
- 2 Projektive Auflösungen** 19.04.
Komplexe, Homologie, Homotopie
projektive Objekte und Auflösungen [Wei94, § 2.2 (S. 33–38)]
- 3 Linksderivierte Funktoren** 26.04.
[Wei94, § 2.4 (S. 43–49)]
- 4 Injektive Auflösungen und rechtsderivierte Funktoren** 03.05.
[Wei94, §§ 2.3 & 2.5 (S. 38–43 & 49–51)]
- 5 Beispiel: Hom & Ext** 10.05.
 Ext^i = derivierte Funktoren von Hom; Beispiele [Wei94, § 3.4]
 Ext^1 = „Extensions“ [Wei94, § 3.4 (S. 76–80)]
- 6 Beispiel: Gruppenhomologie** 17.05.
Gruppen(ko)homologie = derivierte Funktoren des (Ko)Invariantenfunktors
[Wei94, § 6.1 (S. 160 ff.)]
Beispiele: freie und zyklische Gruppen [Wei94, § 6.2 (S. 167 ff.)]
- 7 Homologie von Eilenberg-MacLane-Räumen $K(\pi, 1)$ **** 24.05.
Gruppen(ko)homologie von $\pi = (\text{Ko})\text{Homologie von } K(\pi, 1)$
[May99, § 16.5 (S. 126 f.), Ex. (1) & (2)]
- 8 Beispiel: der inverse Limes *** 31.05.
Der \star bezieht sich auf den Satz von Milnor über die Kohomologie unendlicher Vereinigungen.
[Wei94, § 3.5 (S. 80–87), insbesondere Application 3.5.9]

Teil II: Spektralsequenzen

- 9 Spektralsequenzen – eine Einführung** 07.06.
Spektralsequenz eines Bikomplexes: Idee und einfachste Beispiele
[Vak15, I.1.7 (S. 57–64)] [Wei94, § 5.1 (S. 120–123)]
- 10 Spektralsequenzen – Terminologie** 14.06.
Spektralsequenzen, Filtrierungen, Konvergenz
[Wei94, § 5.2 (S. 123–127)] [Wei94, Def. 5.4.4 (S. 136)]
- 11 Spektralsequenz eines filtrierten Komplexes** 21.06.
Konstruktion [Wei94, § 5.4 (S. 132–135)]
(klassische) Konvergenz [Wei94, Thm. 5.5.1 (S. 135 f.)]
Spektralsequenz eines Bikomplexes als Spezialfall [Wei94, § 5.6 (S. 141–145)]
- 12 Spektralsequenz eines Bikomplexes – Anwendungen** 28.06.
→ Konsistenz von Tor- & Ext
→ Koeffizienten-Spektralsequenz
(Als Spezialfall erhalten wir das in der Topologie II (§ 12) diskutierte “algebraische Koeffizienten-Theorem”.)
- 13 Die Künneth-Spektralsequenz** 05.07.
Cartan-Eilenberg-Auflösungen [Wei94, § 5.7 (S. 145–147)]
Künneth-Spektralsequenz [Rot09]
(Wieder erhalten wir das in der Topologie II (§ 8) diskutierte Künneth-Theorem als Spezialfall.)
- 14 Serre-Spektralsequenz für Homologie **** 12.07.
(vor allem Beispiele) [Hat04, § 1.1 (S. 8–11)]
- 15 Serre-Spektralsequenz für Kohomologie **** 19.07.
(wieder vor allem Beispiele) [Hat04, § 1.2 (S. 24–34)]

Literatur

Der Hauptteil der Vorlesung wird sich an den ersten Kapiteln von [Wei94] ausrichten.

- [Hat04] Allen Hatcher, *The Serre Spectral Sequence*, 2004 (Entwurf). <https://www.math.cornell.edu/~hatcher/SSAT/SSch1.pdf>.
- [May99] Peter May, *A concise course in algebraic topology*, University of Chicago Press, 1999. <http://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf>.
- [McC01] John McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, 2nd ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 58, Cambridge University Press, Cambridge, 2001. [MR1793722](#)
- [Rot09] Joseph J. Rotman, *An introduction to homological algebra*, 2nd ed., Universitext, Springer, New York, 2009. [[matb.r848](#)]. [MR2455920](#)
- [Vak15] Raki Vakil, *Foundations of Algebraic Geometry*, 2015 (Entwurf). <http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/index.html>.
- [Wei94] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. [MR1269324](#)
Errata: <http://www.math.rutgers.edu/~weibel/Hbook-corrections.html>