Topologische K-Theorie

Seminar im Wintersemester 2018/19

Das Seminar umfasst eine Einführung in die Theorie der topologischen Vektorbündel und die auf ihnen basierende sogenannte topologische K-Theorie. Ziel und Höhepunkt ist der Beweis von Adams und Atiyah für die Nichtexistenz höher-dimensionaler Divisionsalgebren: endlich-dimensionale reelle Divisionsalgebren gibt es nur in den Dimensionen eins (die reellen Zahlen $\mathbb{R}$), zwei (die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$), vier (die hamiltonschen Quaternionen $\mathbb{H}$) und acht (die cayleyschen Oktaven $\mathbb{O}$). In einigen Vorträgen soll zudem die enge Verwandtschaft der hier behandelten topologischen Theorie mit der Theorie der projektiven Moduln und algebraischer K-Theorie herausgearbeitet werden.

Vorausgesetzt werden gute Grundkenntnisse der Topologie, wie sie zum Beispiel in der Vorlesung *Einführung in die Topologie* erworben werden können. Der mit ^{Top} markierte Vortrag wird zum Teil auf Resultate der Homotopietheorie aus den Vorlesungen *Topologie I* und *Topologie II* zurückgreifen. Die mit ^{Alg} markierten Themen sind hingegen algebraischer Natur.

Den Seminarschein erlangen Sie, indem Sie sich wie folgt in das Seminar einbringen:

- Sie melden sich bei mir an, einen der Vorträge zu halten, sagen wir Vortrag Nummer i.
- Sie reichen spätestens eine Woche vor Ihrem Vortragstermin eine handschriftliche Ausarbeitung Ihres Vortrags bei mir ein. (Für die ersten zwei Termine treffen wir gesonderte Vereinbarungen.)
- Sie halten Ihren Vortrag zum vereinbarten Termin.
- Sie arbeiten einen zweiten Vortrag schriftlich aus, in der Regel in LaTeX. Ziel ist ein gleichermaßen lesbares wie ehrliches Abbild dessen, was tatsächlich im Seminar behandelt wurde. Sie sollten eventuelle Fehler in der Darstellung korrigieren und präzise Quellenangaben ergänzen, nicht aber alle "Lücken" auffüllen. **Den bisherigen Stand der Ausarbeitung finden Sie auf overleaf.**

Das Seminar findet **freitags, 14:30–16:00 Uhr in Raum 25.22.01.81** statt, zu folgenden Terminen:

1	19.10.	Vektorbündel I	`(MZ/MZ)`
2	26.10.	Vektorbündel II	`(LS/TB)`
3	02.10.	Vektorbündel III	`(AB/AM)`
4	09.11.	Projektive Moduln & der Satz von Swan $^{\mathrm{Alg}}$	`(DM/CH)`
5	16.11.	Grothendiecks K_0 $^{\mathrm{Alg}}$	`(AJ/AW)`
6	23.11.	Bott-Periodizität I	`(KAR/DR)`
7	30.11.	Bott-Periodizität II	`(DR/KAR)`
8	07.12.	K-Theorie als Kohomologietheorie $^{\mathrm{Top}}$	`(AW/AJ)`
9	14.12.	Divisionsalgebren & Vektorfelder auf Sphären	`(MZ/LS)`
10	11.01.	λ-Ringe $^{\mathrm{Alg}}$	`(AM/AB)`
11	18.01.	Das Spaltungsprinzip	`(TB/DM)`
12	25.01.	Reelle Quadratsummenformeln	`(CH/--)`

1: Vektorbündel I (MZ/MZ)

Grundlegende Definitionen, direkte Summe und Tensorprodukt [Hat09, S. 6–11 und 13–15] oder [MS74, §§ 2 + 3]

2: Vektorbündel II (LS/TB)

Innere Produkte [Hat09, S. 11–13], Parakompaktheit [S. 35–37], Pullbacks von Vektorbündeln [S. 18–21]

3: Vektorbündel III (AB/AM)

[Hat09, S. 22–31] (clutching functions, universal bundles)
Für Vortrag 8 ist insbesondere Thm 1.16 interessant: Vektorbündel vom Rang n entsprechen Homotopieklassen von Abbildungen in den Grassmannraum der n-dimensionalen Untervektorräume.

4: Projektive Moduln & der Satz von Swan Alg (DM/CH)

Den bis hierher behandelten Vektorbündeln über topologischen Räumen entsprechen in der kommutativen Algebra die projektiven Modulen. Zur Deutung dieses Slogans wird im ersten Teil des Vortrags erklärt, inwiefern projektive Modulen „lokal frei“ sind: siehe [Cla15, Thm 3.16 und Thm 7.22]. Den einfacheren dieser beiden Sätze können wir hier auch beweisen, den anderen wollen wir zumindest in seiner Aussage verstehen.

Im zweiten Vortragsteil wird der Satz von Swan [Swa62] bewiesen, demzufolge die Kategoie der Vektorbündel über einem kompakten Hausdorff-Raum äquivalent ist zur Kategorie der endlich-erzeugten projektiven Modulen über dem Ring der stetigen Funktionen. Ein eleganter Beweis wird im Wikipedia-Eintrag zu *Karoubi envelope* skizziert:

> The category of vector bundles over any paracompact space is the Karoubi envelope of its full subcategory of trivial bundles. [...] [The Serre-Swan theorem] can be proved by first proving both these facts, the observation that the global sections functor is an equivalence between trivial vector bundles over X and [free] modules over $C(X)$ and then using the universal property of the Karoubi envelope.

Etwas detaillierter wird dieser Beweis zum Beispiel ausgeführt in [Cla15, §§ 6.1–6.4].[1]

5: Grothendiecks K_0 Alg (AJ/AW)

Wichtig für den weiteren Seminarverlauf ist vor allem die Definition von $\mathrm{K}(X)$ in [Hat09, §2.1, S. 39–40]. In [Wei13, Chapter II] wird diese Definition in einem allgemeineren Kontext behandelt. Zunächst wird in [II.1, S. 1–3] eine universelle Konstruktion, die einen Monoid in eine abelsche Gruppe überführt, angegeben und mit einigen Beispielen

[1] [Cla15] folgt der bourbakischen Tradition, in der *quasikompakt* bzw. *kompakt* bezeichnen, was wir *kompakt* bzw. *kompakt Hausdorff* nennen würden.

illustriert. Erst in [II.3, S. 18 ff.] findet dann die Spezialisierung auf den Monoid der Vektorbündel über einem topologischen Raum statt. Wir interessieren uns in diesem Vortrag vor allem für die erste Hälfte dieses Abschnitts, bis Definition 3.2.1. Ab Beispiel 3.1.1 können die Details in Abstimmung mit Vortrag 8 eventuell zugunsten von [II.5, S. 38 ff.] entfallen.

6: Bott-Periodizität I (KAR/DR)

[Hat09, Chapter 2.1, S. 40–47]

7: Bott-Periodizität II (DR/KAR)

[Hat09, Chapter 2.1/2.2, S. 48–54]

8: K-Theorie als Kohomologietheorie Top (AW/AJ)

Wir wollen auf zwei Weisen sehen, dass K-Theorie sich zu einer Kohomologietheorie ausweiten lässt: zum einen, indem wir die erforderlichen Axiome konkret nachprüfen [Hat09, Chapter 2.2, S. 55–58], zum anderen, indem wir die Darstellbarkeit des Funktors in der Homotopiekategorie ausnutzen [May99, § 24].

9: Divisionsalgebren & Vektorfelder auf Sphären (MZ/LS)

Dieser Vortrag ist der Höhepunkt des Seminars: wir beweisen den eingangs erwähnten Satz über Divisionsalgebren. Ursprünglich wurde dieser Satz von Adams mit Hilfe höherer Kohomologieoperationen bewiesen [Ada60]. Wir halten uns stattdessen an den späteren Beweis mittels K-Theorie durch Adams und Atiyah [AA66], wie er in [Hat09, Chapter 2.3, S. 59–65] wiedergegeben ist. An die Existenz und an die Eigenschaften der Adams-Operationen wollen wir dabei zunächst einfach „glauben“ – den Beweis des entsprechenden Satzes [Hat09, Thm 2.20] holen wir in den folgenden beiden Vorträgen nach.

Der Satz über Divisonsalgebren ist äquivalent zu der Aussage, dass es auf der n-Sphäre n-linear unabhängige tangentiale Vektorfelder nur für $n \in \{0, 1, 3, 7\}$ gibt. Die maximale Anzahl solcher linear unabhängigen tangentialen Vektorfelder für allgemeines n hat Adams später in [Ada62] mit Hilfe reeller K-Theorie bestimmt.

10: λ-Ringe Alg (AM/AB)

Alles über die λ-Struktur auf den K-ringen, was wir für den Gesamtzusammenhang des Seminars brauchen, findet sich in [Hat09, Chapter 2.3, S. 62–63]. In diesem Vortrag soll das Thema dennoch etwas ausgebreitet werden. Für eine kurze "philosophische" Einführung empfehle ich ganz unvoreingenommen [Zib14, 1.1]; für die technischen Details die dort angegebenen Quellen, [Wei13, Chapter II.4] oder auch die ausführlichen Notizen [Gri13].

11: Das Spaltungsprinzip (TB/DM)

[Hat09, Chapter 2.3, S. 65–71]

12: Reelle Quadratsummenformeln (CH/--)

Literatur

Wir folgen in erster Linie der Darstellung in den ersten beiden Kapiteln von [Hat09], die sich in vielerlei Hinsicht an den Klassiker [Ati67] anlehnen. Das kürzlich erschienene Lehrwerk [Kna13] bietet eine sehr ausführliche Einführung in die Theorie der Vektorbündel auf Deutsch, die als Ergänzung herangezogen werden kann.

[Ada62] Frank Adams, *Vector fields on spheres*, Ann. of Math. (2) **75** (1962), 603–632. MR0139178

[Ada60] J. F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. (2) **72** (1960), 20–104. MR0141119

[AA66] Frank Adams and Michael Atiyah, *K-theory and the Hopf invariant*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **17** (1966), 31–38. MR198460

[Ati67] Michael Atiyah, *K-theory*, Lecture notes by D. W. Anderson, W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967. MR0224083

[Cla15] Pete Clark, *Commutative Algebra*, 2015 (Entwurf). `http://math.uga.edu/~pete/integral2015.pdf`.

[Gri13] Darij Grinberg, *λ-rings: Definitions and basic properties*, 2013 (Entwurf). `https://sites.google.com/site/darijgrinberg/lambda`.

[Hat09] Allen Hatcher, *Vector Bundles and K-Theory*, 2009 (Entwurf). `http://www.math.cornell.edu/~hatcher/VBKT/VBpage.html`.

[Kna13] Karlheinz Knapp, *Vektorbündel*, Springer, 2013. `http://link.springer.com/book/10.1007/978-3-658-03114-5/page/1` (im Uni-Netz kostenlos verfügbar).

[May99] Peter May, *A concise course in algebraic topology*, University of Chicago Press, 1999. `http://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf`.

[MS74] John W. Milnor and James D. Stasheff, *Characteristic classes*, Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974. Annals of Mathematics Studies, No. 76. MR0440554

[Swa62] Richard Swan, *Vector bundles and projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **105** (1962), 264–277. MR143225

[Wei13] Charles Weibel, *The K-book: an introduction to algebraic K-theory*, AMS, 2013. `http://www.math.rutgers.edu/~weibel/Kbook.html`.

[Zib14] Marcus Zibrowius, *The γ-filtration on the Witt ring of a scheme* (2014). `http://arxiv.org/pdf/1411.3198v1.pdf`.