Quadratische Formen

Seminar im Winter 2021/22

Das Seminar richtet sich primär an fortgeschrittene Studierende in den Bachelor-Studiengängen der Mathematik. Inhaltlich ist das Seminar sicherlich auch für Master-Studierende interessant. Fragen zur Anrechnenbarkeit klären Sie bitte im Zweifelsfall mit dem für Sie zuständigen Prüfungsamt.

Um gewinnbringend am Seminar teilnehmen zu können, sollten Sie das Modul *Algebra* möglichst bereits erfolgreich abgeschlossen haben. Relevante Vorkenntnisse umfassen unter anderem: etwas Modultheorie (Wissen Sie, dass abelsche Gruppen $\mathbb{Z}$-Moduln sind?), etwas multilineare Algebra (Können Sie sich etwas unter dem Tensorprodukt von zwei Vektorräumen vorstellen?), etwas Körpertheorie (Wissen Sie, wie viele endliche Körper es gibt? Wie ist der Grad einer Körpererweiterung definiert? Was ist der algebraische Abschluss?).

1	25.10.	Übersicht & Motivation	`(MZ/--)`
2	08.11.	Quadratische Formen	`(JB/LF)`
3	22.11.	Diagonalisierbarkeit	`(MZ/--)`
4	29.11.	Zerfällung und Kürzung	`(JH/--)`
5	06.12.	Ketten-Äquivalenz	`(JB/LF)`
6	13.12.	Der Witt-Ring	`(CS/--)`
7	20.12.	Der Witt-Ring eines endlichen Körpers	`(MZ/--)`
8	13.01.	Erzeuger und Relationen für Witt-Ringe	`(AL/--)`
9	20.01.	$\star$ Einschränkung und Transfer	`(JH/--)`
10	27.01.	$\star$ Der Witt-Ring der rationalen Zahlen	`(TW/--)`
11	03.02.	$\star$ Exkurs: Der Witt-Ring der ganzen Zahlen	`(AM/--)`

Jeder Vortrag dauert 60 Minuten. Planen Sie im Voraus und teilen Sie sich die Zeit gut ein [TS]. Überziehen ist eine Todsünde [L]. Zu früh enden macht auch keinen guten Eindruck.

Soweit nicht anders angegeben beziehen sich die Literaturangeben auf [Lam05].

1: Übersicht & Motivation (MZ,--)

2: Quadratische Formen (JB,LF)

Eine quadratische Form über einem Körper kann wahlweise aufgefasst werden als Polynom, als Vektorraum zusammen mit einer quadratischen Abbildung, als Bilinearform auf einem Vektorraum oder als eine Matrix. In Charakteristik $\neq 2$ sind alle diese Sichtweisen äquivalent. Geben Sie eine *kurze* Übersicht über alle Sichtweisen und erklären Sie, wie man die jeweils eine in die jeweils andere übersetzt [§ I.1]. Diskutieren Sie außerdem reguläre quadratische Formen [Proposition I.1.2].

Erklären Sie, wie sich quadratische Formen mittels orthogonaler Summe addieren [Anfang § I.2] und mittels Kronecker-Produkt multiplizieren lassen [§ I.6].

Geben Sie einen Ausblick auf Diagonalisierbarkeit [Corollary I.2.4], und erklären Sie, wie sich Summen und Produkte von Diagonalformen bilden lassen.

An einer geeigneten Stelle Ihres Vortrags sollten Sie die hyperbolische Ebene $\mathbb{H}$ einführen (siehe Teile (3) und (4) von [Theorem I.3.2]).

Aufgabe: Sei F ein Körper und $V = \mathrm{Mat}_{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}(\mathrm{F})$ der Vektorraum der $n \times n$-Matrizen über F. Für $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(F)$ sei die Spur von A definiert als $\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

1. Definiere die Abbildung $B_1 \colon V \times V \to V$ durch $B_1(X, Y) := \mathrm{tr}(XY)$. Zeigen Sie, dass (V, B_1) ein regulärer quadratischer Raum (der Dimension n^2) ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $(V, B_1) \cong n\langle 1\rangle + \frac{n(n-1)}{2}\mathbb{H}$.
2. Definiere die Abbildung $B_2 \colon V \times V \to V$ durch $B_2(X, Y) := \mathrm{tr}(X \cdot Y^t)$, wobei Y^t die Transponierte von Y ist. Zeigen Sie, dass (V, B_2) ein regulärer quadratischer Raum (der Dimension n^2) ist. Zeigen Sie weiterhin, dass $(V, B_2) \cong n^2\langle 1\rangle$.

Aufgabe: Finden Sie eine reguläre 3-dimensionale Form $q(x, y, z)$, sodass die 2-dimensionalen Formen $q(0, y, z)$, $q(x, 0, z)$ und $q(x, y, 0)$ jeweils Rang 1 haben.
(Der Rang einer quadratischen Form ist der Rang der zugehörigen symmetrischen Matrix)

3: Diagonalisierbarkeit (MZ,--)

Führen Sie die Wertegruppe einer quadratischen Form ein [Definition I.2.1]. Zeigen Sie sodann, dass jede quadratische Form über einem Körper diagonalisierbar ist [Corollary I.2.4].

Führen Sie isotrope und anisotrope Räume ein [Definition I.3.1]. Besprechen Sie den ersten Darstellungssatz [Corollary I.3.5].

Aufgabe: Seien $a, b \in F^\times$ und sei f eine reguläre quadratische Form. Zeigen Sie, dass $-b$ genau dann von $f \perp \langle a \rangle$ repräsentiert wird, wenn $-a$ von $f \perp \langle b \rangle$ repräsentiert wird.

Aufgabe: Seien $a, b \in F^\times$. Zeigen Sie, dass

1. $b \in D(\langle 1, a \rangle) \Longleftrightarrow b \cdot \langle 1, a \rangle \cong \langle 1, a \rangle$,
2. $D(\langle 1, a \rangle) \cap D(\langle 1, b \rangle) \subseteq D(\langle 1, -ab \rangle)$.

4: Zerfällung und Kürzung (JH,--)

Führen Sie hyperbolische Räume ein, und erinnern Sie an die Definition anisotroper Räume. Diskutieren Sie Witts Zerfällungssatz [I.4.1] und Witts Kürzungssatz [I.4.2].

Aufgabe: Zeigen Sie, dass der Kürzungssatz in Charakteristic 2 nicht gilt.
Konkret: Sei F ein Körper der Charakteristik 2 (z.B. $\mathbb{F}_{2^n}$ oder $\mathbb{F}_{2^n}(t)$). Zeigen Sie

$$\langle -1, -1, 1 \rangle \cong \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \langle -1, 1 \rangle \ncong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe: Seien $a, b \in F^\times$ mit $a^2 + b^2 =: c \neq 0$. Zeigen Sie, dass die 4-dimensionale Form $\langle 1, 1, -c, -c \rangle$ hyperbolisch ist.

Aufgabe: Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Jede 4-dimensionale Form über F mit Determinante -1 is isotrop,
2. Jede Form gerader Dimension über F mit Determinante -1 is isotrop,
3. Jede 3-dimensionale Form über F repräsentiert die eigene Determinante,
4. Jede Form ungerader Dimension über F repräsentiert die eigene Determinante.

5: Ketten-Äquivalenz (JB,LF)

Wann sind zwei Diagonalformen äquivalent? Geben Sie, [§ I.5] folgend, eine erste Antwort auf diese Frage.

Aufgabe: Zeigen Sie, dass 7 nicht von der Form $\langle 2, 3, 6 \rangle$ über $\mathbb{Q}$ repräsentiert wird.
Hinweis: Zeigen Sie zuerst $\langle 2, 3, 6 \rangle \cong \langle 1, 1, 1 \rangle$ durch eine geeignete Ketten-Äquivalenz.

Aufgabe: Sei $n \geq 3$. Zeigen Sie, dass $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle \cong \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ genau dann, wenn es $a, b, c_3, \ldots, c_n \in F^\times$ gibt mit

$$\langle a_2, \ldots, a_n \rangle \cong \langle a, c_3, \ldots, c_n \rangle, \quad \langle b_2, \ldots, b_n \rangle \cong \langle b, c_3, \ldots, c_n \rangle, \quad \langle a_1, a \rangle \cong \langle b_1, b \rangle.$$

6: Der Witt-Ring (CS,--)

Führen Sie den Grothendieck–Witt-Ring $\mathrm{GW}(F)$ und den Witt-Ring $\mathrm{W}(F)$ eines Körpers F ein [§ I.6].[1] Definieren Sie die Dimensions- (oder Rang-)Abbildungen $\mathrm{GW}(F) \to \mathbb{Z}$ und $\mathrm{W}(F) \to \mathbb{Z}/2$ und die Determinante $d\colon \mathrm{GW}(F) \to \dot{F}/\dot{F}^2$. Beschreiben Sie diese Ringe und Abbildungen explizit für einige Beispiele, inbesondere für die Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ und für endliche Körper. (Sie werden dazu auf Ergebnisse von [§§ II.2 und II.3] vorgreifen müssen.)

Aufgabe: Zeigen Sie $\mathrm{Groth}(\mathbb{N}_0) \cong \mathbb{Z}$ als Ringe ($\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$).

Aufgabe: Sei $G = F^\times/(F^\times)^2$ und $\mathbb{Z}G$ der ganzzahlige Gruppenring von G. Weiterhin sei $J \subseteq \mathbb{Z}G$ das von Ausdrücken der Form $a(F^\times)^2 + b(F^\times)^2 - c(F^\times)^2 - d(F^\times)^2$ für $\langle a, b\rangle \cong \langle c, d\rangle$ erzeugte Ideal. Zeigen Sie, dass es einen natürlichen Ringisomorphismus $\mathbb{Z}G/J \to \mathrm{GW}(F)$ gibt.
Hinweis: $\mathbb{Z}G := \{\sum_{i=1}^{j} n_i g_i \mid n_i \in \mathbb{Z},\ g_i \in G\}$ ist als abelsche Gruppe der freie $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis G und die Multiplikation ist $(\sum_{i=1}^{j} n_i g_i)(\sum_{k=1}^{l} m_k h_k) = \sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{l}(n_i m_k)(g_i h_k)$.

7: Der Witt-Ring eines endlichen Körpers (MZ,--)

Besprechen Sie die Beispiele aus dem vorherigen Vortrag in größerer Ausführlichkeit, insbesondere die Berechnung der Grothendieck–Witt und Wittringe endlicher Körper [§§ II.2 und II.3].

8: Erzeuger und Relationen für Witt-Ringe (AL,--)

Besprechen Sie [§ II.4]. Illustrieren Sie Resulate anhand der bereits besprochenen Beispiele!

Aufgabe: Der Grothendieck-Witt Ring $\mathrm{GW}(F)$ wird von Elementen der Form $\langle a\rangle$ erzeugt (wobei $a \in F^\times$), mit folgenden Relationen:

1. $\langle a\rangle = \langle ab^2\rangle$ mit $a, b \in F^\times$,
2. $\langle a\rangle\langle b\rangle = \langle ab\rangle$ mit $a, b \in F^\times$,
3. $\langle a\rangle + \langle b\rangle = \langle a+b\rangle + \langle ab(a+b)\rangle$ mit $a, b \in F^\times$ und $a + b \neq 0$.

Zeigen Sie, dass die Relation $\langle a\rangle + \langle -a\rangle = \langle 1\rangle + \langle -1\rangle$ für $a \in F^\times$ bereits aus den anderen drei folgt.

9: ⋆ Einschränkung und Transfer (JH,--)

Für einen Körpererweiterung $K : F$ lässt sich eine Abbildung $r^*\colon \mathrm{GW}(F) \to \mathrm{GW}(K)$ definieren, die üblicherweise *restriction*, also Einschränkung, genannt wird. (Ein intuiverer Name wäre wohl *extension* = Ausweitung.) Unter geeigneten Bedingungen lässt sich auch

[1] Lam schreibt $\widehat{W}(F)$ für den Grothendieck–Witt-Ring eines Körpers F. In der aktuellen Literatur ist die Schreibweise $\mathrm{GW}(F)$ üblicher. Die Notation $\mathrm{W}(F)$ für den Witt-Ring ist allgemein üblich, aber auch hier gibt es einen Fallstrick: verwechseln Sie ihn nicht mit dem *Ring der Witt-Vektoren*. Das ist etwas ganz anderes.

ein interessanter Homomorphismus in die umgekehrte Richtung konstruieren, der Transfer genannt wird. Führen Sie beide Konstruktionen ein, behandeln Sie die wesentlichen Ergebnisse von [§§ VII.1–2] und rechnen Sie vor allem einige Beispiele durch.

10: ⋆ Der Witt-Ring der rationalen Zahlen (TW,--)

Für diesen Vortrag ist es hilfreich, wenn Sie die p-adischen Zahlen schon einmal gesehen haben. Besprechen Sie das Hauptresultat von [VI.4], also Theorem 4.1 bzw. den Isomorphismus (4.4). Führen Sie dazu die p-adischen Zahlen $\mathbb{Q}_p$ ein und definieren Sie die Abbildungen $\mathrm{W}(\mathbb{Q}) \to \mathrm{W}(\mathbb{F}_p)$ [Corollary VI.1.6]. Erklären Sie sodann, inwiefern dieses Theorem das Hasse–Minkowski-Prinzip für die rationalen Zahlen beinhaltet [Corollary VI.3.3].

Sie werden keine Zeit haben, das Hauptresultat zu beweisen. Illustrieren Sie stattdessen mit Beispielen, wie es uns hilft, quadratischen Formen über $\mathbb{Q}$ zu unterscheiden.

11: ⋆ Exkurs: Der Witt-Ring der ganzen Zahlen (AM,--)

Beschreiben Sie den Witt-Ring der ganzen Zahlen, $\mathrm{W}(\mathbb{Z})$. Geben Sie eine Übersicht über die Berechnung in [MH73, §§ II.1–4].

Literatur

[Lam05] T. Y. Lam, *Introduction to quadratic forms over fields*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 67, American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. ebook (Zugriff nur aus dem Campus-Netz): `http://www.ams.org/books/gsm/067/`; Eintrag im ULB-Katalog.

[MH73] John Milnor and Dale Husemoller, *Symmetric bilinear forms*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 73, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1973. ebook (Zugriff nur aus dem Campus-Netz): `https://link.springer.com/book/10.1007%2F978-3-642-88330-9`; Eintrag im ULB-Katalog.

[TS] *Technically Speaking*. `http://techspeaking.denison.edu`.

[L] Manfred Lehn, *Wie halte ich einen Seminarvortrag?*. `http://download.uni-mainz.de/mathematik/Topologie%20und%20Geometrie/Lehre/Wie-halte-ich-einen-Seminarvortrag.pdf`.