Stone-Räume

Seminar im Winter 2024/25
LSF-Eintrag

1	15.10.	Verbände (lattices)	(EB)
2	22.10.	Heyting-Algebren	(RL)
3	29.10.	Ideale und Filter, und ein erster Darstellungsatz für distributive Verbände	(SS)
4	05.11.	Adjunktionen, Monaden und freie Funktoren	(EB)
5	12.11.	Freie Verbände I, und ein erster Darstellungsatz für Boolsche Algebren	(ML)
6	19.11.	Freie Verbände II	(MK)
7	26.11.	Frames und Locales	(SS)
8	03.12.	Sublocales	(MA)
9	10.12.	Freie Frames und Koprodukte von Frames/ Produkte von Locales	(MA)
10	17.12.	Kohärenz und der Darstellungssatz für distributive Verbände	(RL)
11	07.01.	Stones Darstellungssatz für Boolsche Algebren	(MK)
12	14.01.	Eine alternative Sicht auf kohärente Räume	(ML)
13	21.01.	Das Zariski-Spektrum	(??)

Bitte fertigen Sie zu jedem Vortrag eine schriftliche Ausarbeitung an und senden Sie mir diese mindestens eine Woche vor dem Vortrag zu. Dienstags 9:30 Uhr biete ich jeweils eine Vorbesprechung für den Vortrag der darauffolgenden Woche an (Büro 25.22.03.63).

Der Vortrag selbst dauert 90 Minuten, wobei Sie insgesamt 30 bis 45 Minuten für Zwischenfragen und für die Bearbeitung von Präsenzübungen durch die übrigen Teilnehmer reservieren sollten. Üben Sie den Vortrag im Vorfeld mindestens einmal unter möglichst realistischen Bedingungen. Überziehen ist eine Todsünde. [TS, L]

Soweit nicht anders angegeben beziehen sich die Literaturangaben auf [Joh86]. Im Text befinden sich eine Reihe von Aufgaben, die Sie für die schriftliche Ausarbeitung selbst lösen müssen. Wenn die Aufgaben hinreichend leicht sind, können Sie sie als Präsenzaufgaben für Ihren Vortrag verwenden. Eine andere gute Quelle für Präsenzaufgaben sind konkrete Beispiele.

$$
\begin{tikzcd}
\begin{pmatrix}\text{Mengen}\end{pmatrix} \arrow[rr, shift left, "\text{Potenzmenge}"] \arrow[rr, phantom, "\simeq_5"] \arrow[d, hook, "\text{Stone–Čech}"] & & \begin{pmatrix}\text{vollständige}\\ \text{atomare}\\ \text{Boolsche}\\ \text{Algebren}\end{pmatrix}^{\mathrm{op}} \arrow[ll, shift left, "\text{Atome}"] \\
& & \cap \\
\begin{pmatrix}\text{Stone-}\\ \text{Räume}\end{pmatrix} \arrow[rr, shift left, "K"] \arrow[rr, phantom, "\simeq_{11}"] & & \begin{pmatrix}\text{Boolsche}\\ \text{Algebren}\end{pmatrix}^{\mathrm{op}} \arrow[ll, shift left, "\mathrm{Spec} := \mathrm{pt}\circ \mathrm{Idl}"] \\
\cap & & \cap \\
\begin{pmatrix}\text{kohärente}\\ \text{Räume}\end{pmatrix} \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & \begin{pmatrix}\text{kohärente}\\ \text{Locales}\end{pmatrix} \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left, "K"] \arrow[r, phantom, "\simeq_{10}"] & \begin{pmatrix}\text{distibutive}\\ \text{Verbände}\end{pmatrix}^{\mathrm{op}} \arrow[l, shift left, "\mathrm{Idl}"] \\
\cap & \cap & \\
\begin{pmatrix}\text{nüchterne}\\ \text{Räume}\end{pmatrix} \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\simeq_7"] & \begin{pmatrix}\text{raumartige}\\ \text{Locales}\end{pmatrix} \arrow[l, shift left] & \\
\cap & \cap & \\
\begin{pmatrix}\text{topologische}\\ \text{Räume}\end{pmatrix} \arrow[r, shift left, "\Omega"] & \begin{pmatrix}\text{Locales}\end{pmatrix} \arrow[l, shift left, "\mathrm{pt}"] &
\end{tikzcd}
$$

Abbildung 1: Übersicht über die diversen „Darstellungssätze“ im Seminar: Äquivalenz $\simeq_n$ wird in Vortrag n behandelt.

Der Funktor Ω wirft einen Raum auf den Verband seiner offenen Mengen. Er ist linksadjungiert zum Funktor $\mathrm{pt} := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Loc}}(2, -)$, der ein Locale auf seine „Punkte“ wirft. Diese Adjunktion schränkt sich ein auf die Äquivalenz $\simeq_7$ zwischen nüchternen Räumen und raumartigen Locales.

Die kohärenten Räume sind diejenigen nüchternen Räume, in denen der Halbverband der kompakten offenen Teilmengen ein Unterverband ist. Sie sind inbesondere kompakt. Der Funktor K, der einen kohärenten Raum auf den Verband seiner kompakten offenen Teilmengen wirft, definiert eine Äquivalenz zwischen kohärenten Räumen und distributiven Verbänden. Diese Äquivalenz faktorisiert natürlich durch eine Unterkategorie der Kategorie der raumartigen Locales, die Kategorie der kohärenten Locales. Der inverse Funktor zur Äquivalenz K zwischen kohärenten Locales und distributiven Verbänden ist der Funktor Idl, der einen distributiven Verband auf den Verband seiner Ideale wirft.

Die Stone-Räume sind diejenigen kohärenten Räume, die der Unterkategorie der Boolschen Algebren in der Kategorie der distributiven Verbände entsprechen. Der Stonesche-Darstellungssatz ergibt sich also einfach aus den Äquivalenzen $\simeq_7$ und $\simeq_{10}$ durch Einschränkung.

Viel einfacher zu sehen ist, dass die Kategorie der Mengen dual ist zur Kategorie der *vollständigen atomaren* Boolschen Algebren ($\simeq_5$). Allerdings sind nur die *endlichen* diskreten Mengen Stone-Räume (denn nur diese sind kompakt). Der Inklusion der *vollständigen atomaren* Boolschen Algebran in die Kategorie aller Boolschen Algebren rechts im Diagramm entspricht links der Stone–Čech-Kompaktifizierungs-Funktor. Diese Verbindung wird im Seminar nicht behandelt.

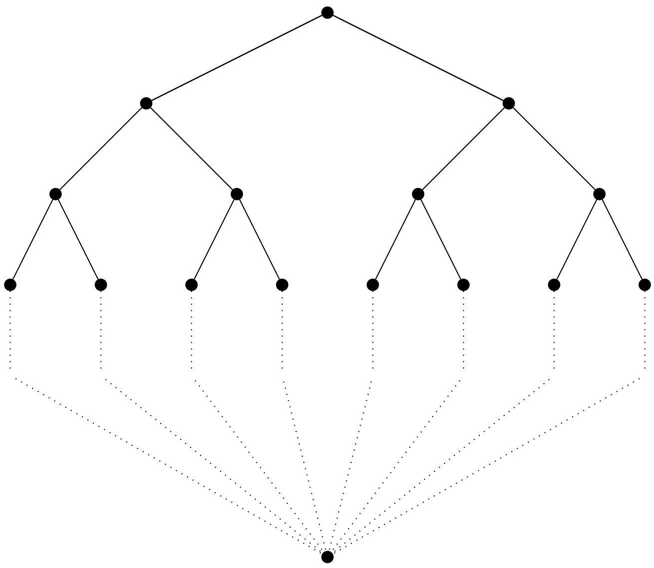

Abbildung 2: Hasse-Diagramm von $K\Omega(2^{\mathbb{N}})$

1: Verbände (lattices) (EB)

Führen Sie die Grundbegriffe aus I.1.1 bis I.1.9 ein. Illustrieren Sie die Theorie mit vielen Beispielen, siehe I.7. Übertragen Sie Beispiel I.7 (c) auch auf andere algebraische Objekte, zum Beispiel auf Vektorräume. Illustrieren Sie auch und insbesondere die Korrespondenz zwischen Boolschen Algebren und Boolschen Ringen (I.9) mit vielen im Detail ausgearbeiteten Beispielen. Erwähnen Sie auch die in Lemma V.2.1 angegebene Verallgemeinerung.

Nachtrag: Erwähnen und illustrieren Sie einige nicht-atomsche Boolsche Algebren, z.B. die „Cantor-Algebra", den Verband $K\Omega(2^{\mathbb{N}})$ der kompakten offenen Teilmengen von $2^{\mathbb{N}}$. Das Hasse-Diagramm ist in Abbildung 2 angedeutet.

2: Heyting-Algebren (RL)

Führen Sie Heyting-Algebren ein (I.10). Erwähnen Sie das topologische Beispiel, das in II.1.1 genannt wird.

Skizzieren Sie als Exkurs die Verbindung zwischen Boolschen Algebren und klassischer Logik einerseits, und Heyting-Algebren und intuitionistischer Logik andererseits. Eine kurze Zusammenfassung finden Sie am Beginn von [SEP, Kapitel 5]. Details zu dieser Sichtweise auf Heyting-Algebren finden Sie beispielsweise in [Awo10, § 6.4].

3: Ideale und Filter, und ein erster Darstellungsatz für distributive Verbände (SS)

Behandeln Sie die Inhalte von I.2.1 bis I.2.6. Illustrieren Sie insbesondere den Begriff des Filters mit Beispieln und Bildern. Arbeiten Sie insbesondere Aufgabe I.2.5 aus. Ergänzen Sie die Aussage in I.2.6 durch Korollar 4.9 (ii). Erwähnen/zeigen Sie auch, dass für eine Boolsche Algebra B Homomorphismen $B \to \mathbf{2}$ maximalen Filtern (sogenannten Ultrafiltern) in B entsprechen [Awo10, §,2.8, Aufgabe 12].

4: Adjunktionen, Monaden und freie Funktoren (EB)

Führen Sie kategoriellen Begriffe und Theorem aus I.3.1 bis I.3.6 ein. Erklären Sie insbesondere, was unter einem „freien“ Objekt zu verstehen ist.

5: Freie Verbände I, und ein erster Darstellungsatz für Boolsche Algebren (ML)

Erklären Sie zunächst die kategoriellen Begriffe aus I.3.7 und I.3.8. (Die wesentliche Aussage von Abschnitt I.3.8 ist: Jede *finitary algebraic category* ist per Definition sowohl *equationally presented* als auch *algebraic*, also monadisch über der Kategorie der Mengen. Es ist aber weder jede *equationally presented category* auch *algebraic* noch jede *algebraic category* auch *equationally presented.*)

Behandeln Sie sodann das Material aus I.4.1 bis I.4.3. Erklären und beweisen Sie dabei auch das Theorem aus der Einleitung des Buches: *A Boolean algebra is isomorphic to the algebra of all subsets of some set if and only if it is complete and atomic.*

6: Freie Verbände II (MK)

Fassen Sie I.4.4 bis I.4.10 geeignet zusammen. Illustrieren Sie die Aussagen mit Beispielen, und beweisen Sie eine Auswahl.

7: Frames und Locales (SS)

Behandeln Sie die Inhalte von II.1.1 bis II.1.8.

8: Sublocales (MA)

Behandeln Sie die Inhalte von II.2.1 bis II.2.4.

9: Freie Frames und Koprodukte von Frames/Produkte von Locales (MA)

Behandeln Sie die Inhalte von II.2.11 bis II.2.13.

Optional: Erwähnen/skizzieren Sie ergänzend zu den Begrifflichkeiten in II.2.11 den allgemeineren site-Begriff, wie er im Kontext von Grothendieck-Topologien auf einer Kategorie verwendet wird.

10: Kohärenz und der Darstellungssatz für distributive Verbände (RL)

Behandeln Sie die Inhalte von II.3.1 bis II.3.4. Erklären Sie insbesondere, dass das Konzept „endlicher Elemente" die folgenden drei Konzepte abstrahiert: „endliche Teilmengen einer Menge", „endlich-erzeugte Untergruppen einer Gruppe" (siehe 3.1) und „kompakte offenen Teilmengen eines topoloigschen Raums" (siehe 3.4) abstrahiert. Erwähnen und erklären Sie auch, dass das Zariski-Spektrum eines kommutativen Rings kohärent ist (siehe V.3.6).

11: Stones Darstellungssatz für Boolsche Algebren (MK)

Behandeln Sie die Inhalte von II.4.1 bis II.4.4.

Optional: Ergänzen Sie die äquivalenten Beschreibungen von Stone-Räumen in II.4.1 durch die Beschreibung als *pro-endliche Mengen*, siehe [wiki] und Theorem VI.2.3. Die auf Wikipedia gewählte Formulierung sollte sich ohne den kategoriellen Überbau von [Joh86, Kapitel VI] erklären lassen.

12: Eine alternative Sicht auf kohärente Räume (ML)

Behandeln Sie die Inhalte von II.4.5 bis II.4.9: kohärente Räume sind geordnete Stone-Räume. Genauer erhalten wir aus jedem kohärenten Raum durch Verfeinerung der Topologie einen Stone-Raum, der über die Spezialisierungsordnung der kohärenten Topologie geordnet ist, und dies definiert eine Kategorienäquivalenz zwischen kohärenten Räumen und gewissen geordneten Stone-Räumen.

13: Das Zariski-Spektrum (??)

Geben Sie einen Überblick über V.1 und V.3.

Literatur

[Joh86] Peter T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1986. Reprint of the 1982 edition. Eintrag auf mathsci.net

[Awo10] Steve Awodey, *Category theory*, 2nd ed., Oxford Logic Guides, vol. 52, Oxford University Press, Oxford, 2010. Eintrag auf mathsci.net

[L] Manfred Lehn, *Wie halte ich einen Seminarvortrag?*. http://download.uni-mainz.de/mathematik/Topologie%20und%20Geometrie/Lehre/Wie-halte-ich-einen-Seminarvortrag.pdf.

[SEP] *Algebraic Propositional Logic*. https://plato.stanford.edu/entries/logic-algebraic-propositional/#AlgeSema.

[TS] *Technically Speaking*. http://techspeaking.denison.edu.

[wiki] *Stone space*. https://en.wikipedia.or/wiki/Stone_space#Equivalent_conditions.