

D1: Linksderivierte Funktoren

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsche Kategorien

Ist $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ exakt, und

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in $\mathcal{A}$, so reicht es oft, zwei der drei Objekte FX, FY, FZ in $\mathcal{B}$ zu kennen, um das dritte zu „berechnen“.

Ist F nur rechtsexakt, reicht aber beispielsweise Kenntnis von FY und FZ i.A. nicht, um FX zu berechnen:

$$\dots \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow \textcircled{FX} \rightarrow FY \rightarrow FZ \rightarrow 0$$

?

Idee: Setze Sequenz nach links durch weitere, leichter berechenbare Objekte fort (und berechne erst daraus FX).

Projektive Auflösungen

$\mathcal{A}$ abelsche Kategorie

1. Def.: Eine (linke) Auflösung eines Objekts M aus $\mathcal{A}$ ist ein Komplex $P_\bullet$ aus $\text{Kom}(\mathcal{A})$ mit $P_i = 0 \ \forall i < 0$ zusammen mit einem Morphismus $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$

M aufgefasst als Komplex, der in Grad 0 konzentriert ist.

derart, dass

$$\dots \rightarrow P_3 \xrightarrow{d} P_2 \xrightarrow{d} P_1 \xrightarrow{d} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0$$

exakt ist.

Sie heißt **projektiv**, falls jedes P_i projektiv ist.

2. Übung: $(P_\bullet, \varepsilon)$ Auflösung $\Leftrightarrow P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ ist ein Quasiisomorphismus

3. Def. & Satz: $\mathcal{A}$ besitzt genügend projektive Objekte, falls für jedes Objekt M aus $\mathcal{A}$ ein projektives Objekt P_0 mit einem Epimorphismus $P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M$ existiert. In diesem Fall besitzt jedes Objekt aus $\mathcal{A}$ eine projektive Auflösung.

Beweis:

Wähle zu gegebenem M einen Epimorphismus $P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M$.

Schreibe M_0 für den Kern von ε :

$$0 \rightarrow M_0 \xrightarrow{K_0} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0$$

Wähle $P_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} M_0$ mit P_1 projektiv, und definiere

$$d_1 := K_0 \circ \varepsilon_1:$$

$$\begin{array}{ccc} & M_0 & \\ \varepsilon_1 \nearrow & & \searrow K_0 \\ P_1 & \xrightarrow{d} & P_0 \end{array}$$

Setze dies induktiv fort. Dann ist

$$\begin{array}{ccccccc} & & M_2 & & M_0 & & \\ & \varepsilon_3 \nearrow & & \searrow K_2 & \varepsilon_1 \nearrow & & \searrow K_0 \\ \dots \rightarrow P_3 & \xrightarrow{d} & P_2 & \xrightarrow{d} & P_1 & \xrightarrow{d} & P_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \rightarrow 0 \\ & & \varepsilon_2 \searrow & & \nearrow K_1 & & \\ & & M_1 & & & & \end{array}$$

eine projektive Auflösung von M . □

4. Beispiel: Jeder R -Modul besitzt eine projektive (sogar: eine freie) Auflösung.

5. Satz: Sei $M \xrightarrow{f} N$ in $\mathcal{A}$ beliebig,

$P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ in $\text{Kom}(\mathcal{A})$ mit $\begin{matrix} P_i \text{ projektiv} & \forall i \geq 0 \\ P_i = 0 & \forall i < 0 \end{matrix}$
 $A_\bullet \xrightarrow{\varphi} N$ in $\text{Kom}(\mathcal{A})$ beliebige Auflösung

Dann existiert ein Morphismus $f_\bullet : P_\bullet \rightarrow A_\bullet$ derart,

$$\begin{array}{ccc} P_\bullet & \xrightarrow{\varepsilon} & M \\ f_\bullet \downarrow & & \downarrow f \\ A_\bullet & \xrightarrow{\varphi} & N \end{array}$$

Kommutiert. Ferner ist $f_\bullet$ bis auf Homotopie eindeutig.

6. Korollar / Übung: Alle projektiven Auflösungen desselben Objekts sind homotopieäquivalent.

Beweis zu Satz 5:

Konstruiere $f_\bullet$ induktiv.

IA: „Übung“

IS: Angenommen, f_{i-1}, f_{i-2} bereits definiert.

$$\begin{array}{ccccc} P_i & \xrightarrow{d_i} & P_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & P_{i-2} \\ \downarrow \text{dashed} & \nearrow \text{dashed} & \downarrow f_{i-1} & & \downarrow f_{i-2} \\ A_i & \xrightarrow{d_i} & A_{i-1} & \xrightarrow{d_{i-1}} & A_{i-2} \end{array}$$

A. exakt

$f_{i-1} \circ d_i$ faktorisiert durch $\searrow = \text{im}(d_i) = \ker(d_{i-1})$, denn

$$d_{i-1} \circ f_{i-1} \circ d_i = f_{i-2} \circ \underbrace{d_{i-1} \circ d_i}_0 = 0$$

Diese Faktorisierung faktorisiert durch A_i , da P_i projektiv.

Sei nun $\tilde{f}_\bullet$ weitere Wahl von $f_\bullet$. Definiere $h_\bullet := \tilde{f}_\bullet - f_\bullet$.

Wir zeigen $h \simeq 0$. Dazu konstruieren wir induktiv

$$\gamma_i: P_i \longrightarrow A_{i+1}$$

mit $\gamma d + d\gamma = h$.

IA: $\gamma_i = 0$ für $i < 0$.

IS: Seien $\gamma_{i-1}, \gamma_{i-2}$ bereits konstruiert, also

$$d_i \gamma_{i-1} + \gamma_{i-2} d_{i-1} = h_{i-1}. \quad (*)$$

$h_i - \gamma_{i-1} d_i$ faktorisiert durch $\searrow = \text{im}(d_{i+1}) = \ker(d_i)$,
denn

$$\begin{aligned} d_i \circ (\underline{h_i - \gamma_{i-1} d_i}) &= d_i h_i - d_i \gamma_{i-1} d_i \\ &= h_{i-1} d_i - d_i \gamma_{i-1} d_i \\ &= \underbrace{(h_{i-1} - d_i \gamma_{i-1})}_{=0} \circ d_i \\ &= \gamma_{i-2} \underbrace{d_{i-1}}_{=0} \circ d_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

wegen $(*)$

Diese Faktorisierung faktorisiert durch A_{i+1} , da P_i projektiv. Wähle diese Faktorisierung als γ_i .

Dann gilt:

$$\underline{d_{i+1} \gamma_i} + \gamma_{i-1} d_i = \underline{h_i - \gamma_{i-1} d_i} + \gamma_{i-1} d_i = h_i$$

□

Linksderivierte Funktoren

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ abelsch, $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ additiven Funktor

7. Konstruktive Def.:

$\mathcal{A}$ mit genügend projektiven Objekten

F rechtsexakt

Die linksderivierten Funktoren $L_i F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$

sind wie folgt def.:

Wähle zu jedem Objekt X aus $\mathcal{A}$ eine projektive

Auflösung $(P_\bullet(X), \epsilon_X)$; zu jedem Morphismus

$f: X \rightarrow Y$ in $\mathcal{A}$ ein $f_\bullet: P_\bullet(X) \rightarrow P_\bullet(Y)$ wie in

Satz 5. Definiere

$$(L_i F)(X) := H_i(F P_\bullet(X))$$

$$(L_i F)(f) := H_i(F f_\bullet)$$

8. Satz:

(a) $L_i F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ist ein additiver Funktor

(b) $L_i F$ ist unabhängig von der Wahl der Auflösungen, bis auf (natürliche – siehe Def. 11[?] unten) Isomorphie.

(c) $L_0 F \cong F$ und $L_i F = 0 \quad \forall i < 0$.

(d) (Existenzberechtigung:)

Für jede k.e.S.

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{A}$$

passen die derivierten Funktoren in eine lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{c}
 \dots \\
 \hookrightarrow L_2 FX \rightarrow L_2 FY \rightarrow L_2 FZ \rightarrow \delta_2 \\
 \hookrightarrow L_1 FX \xrightarrow{L_1 Ff} L_1 FY \xrightarrow{L_1 Fg} L_1 FZ \rightarrow \delta_1 \\
 \hookrightarrow FX \xrightarrow{Ff} FY \xrightarrow{Fg} FZ \rightarrow 0
 \end{array}$$

Beweisfragmente:

(a) Funktor $[...] \checkmark$

additiv: $f_* + g_*$ ist Auflösung von $f+g$ $[...]$

(b) Alle projektiven Auflösungen von X sind homotopieäquivalent (Korollar 6), haben also isomorphe Homologien (M4, Korollar 13).

Alle Auflösungen f_* von f sind homotop (Satz 5), induzieren also denselben Morphismus auf Homologie (M4, Satz 11).

(c) $P_i(X) = 0$ in Graden $i < 0$, also

$$H_i(P_*(X)) = 0 \quad \text{für} \quad i < 0$$

Zu $L_0 F$: Für $P_* = P_*(X) = \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$

Betrachte:

$$\begin{array}{rcl}
 P_1 & \rightarrow & P_0 \rightarrow X \rightarrow 0 & - \text{ exakt} \\
 F P_1 & \rightarrow & F P_0 \rightarrow F X \rightarrow 0 & - \text{ exakt, da } F \text{ rechts-exakt} \\
 \parallel & & \parallel & \\
 F P_1 & \rightarrow & F P_0 \rightarrow H_0(F P_*) \rightarrow 0 & - \text{ exakt} \\
 & & \parallel & \\
 & & F P_0 / F P_1 &
 \end{array}$$

Der induzierte Morphismus $\downarrow$ ist nach Fünfer-Lemma ein Iso.

(d) Beweis benutzt:

9. Hufeisenlemma:

Sei in abelscher Kategorie $\mathcal{A}$

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$$

gegeben, wobei $P.(X)$ projektive Auflösung von X ,
 $P.(Z)$ projektive Auflösung von Z ,
und horizontale Sequenz exakt ist.

Das Diagramm lässt sich um

$P.(Y)$, eine proj. Auflösung von Y ,
und um Auflösungen f_i von f und g_i von g
ergänzen damit, dass

$$0 \rightarrow P_i(X) \xrightarrow{f_i} P_i(Y) \xrightarrow{g_i} P_i(Z) \rightarrow 0$$

für jeden Grad i eine spaltende k.e.s. ist.

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P.(X) & \xrightarrow{f} & P.(Y) & \xrightarrow{g} & P.(Z) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & Z \rightarrow 0 \end{array} \right]$$

□

Beweis zu Satz 8 (a), fortgesetzt:

Wähle projektive Auflösungen $P_\bullet(X) \rightarrow X$
und $P_\bullet(Z) \rightarrow Z$

beliebig, und $P_\bullet(Y) \rightarrow Y$ wie im Hurewicz-Lemma.

Da

$$0 \rightarrow P_i(X) \xrightarrow{f_i} P_i(Y) \xrightarrow{g_i} P_i(Z) \rightarrow 0$$

spaltet, ist auch

$$0 \rightarrow F P_i(X) \xrightarrow{F f_i} F P_i(Y) \xrightarrow{F g_i} F P_i(Z) \rightarrow 0$$

exakt für jedes i . (Hier benutzen wir nur Additivität von F .)

(Übung: Additive Funktoren erhalten spaltende k.e.S.)

Wir erhalten also eine k.e.S. von Komplexen

$$0 \rightarrow F P_\bullet(X) \rightarrow F P_\bullet(Y) \rightarrow F P_\bullet(Z) \rightarrow 0,$$

und die gesuchte lange exakte Sequenz ist die assoziierte lange exakte Homologiesequenz.

$$\begin{array}{lcl} \dots & & \dots \\ \hookrightarrow L_2 F X \rightarrow L_2 F Y \rightarrow L_2 F Z & \xrightarrow{\delta_2} & L_2 F = H_2(P_\bullet()) \\ \hookrightarrow L_1 F X \rightarrow L_1 F Y \rightarrow L_1 F Z & \xrightarrow{\delta_1} & L_1 F = H_1(P_\bullet()) \\ \hookrightarrow F X \rightarrow F Y \rightarrow F Z \rightarrow 0 & & F = L_0 F = H_0(P_\bullet()) \end{array}$$

□

10. Def.: Ein **homologischer $\mathcal{S}$ -Funktoren** zwischen abelschen Kategorien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ ist eine Familie additiver Funktoren $T_i: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \quad (i \geq 0)$ zusammen mit Morphismen

$$S_i: T_i Z \rightarrow T_{i-1} X$$

für jede k.e.S. $0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0$ in $\mathcal{A}$ derart, dass gilt:

– Für jede solche k.e.S. ist

$$\begin{array}{c} \cdots \\ \hookrightarrow T_2 X \rightarrow T_2 Y \rightarrow T_2 Z \xrightarrow{S_2} T_1 X \\ \hookrightarrow T_1 X \rightarrow T_1 Y \rightarrow T_1 Z \xrightarrow{S_1} T_0 X \\ \hookrightarrow T_0 X \rightarrow T_0 Y \rightarrow T_0 Z \rightarrow 0 \end{array}$$

exakt (insbesondere T_0 rechts-exakt).

– Die S_i s sind natürlich: kommutiert

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & X & \rightarrow & Y & \rightarrow & Z \rightarrow 0 & \text{(exakt)} \\ & & \downarrow x & & \downarrow y & & \downarrow z & \\ 0 & \rightarrow & X' & \rightarrow & Y' & \rightarrow & Z' \rightarrow 0 & \text{(exakt)} \end{array}$$

in $\mathcal{A}$, so kommutiert auch

$$\begin{array}{ccc} T_i Z & \xrightarrow{S_i} & T_{i-1} X \\ T_i \downarrow & & \downarrow T_{i-1} x \\ T_i Z' & \xrightarrow{S_i} & T_{i-1} X' \end{array}$$

Er ist universell, falls für jeden weiteren $\mathcal{S}$ -Funktork (S_*, S_*') und jede natürliche Trafo

$$S_0 \rightsquigarrow T_0$$

eine eindeutige Familie natürlicher Trafos

$$S_i \rightsquigarrow T_i$$

existiert, die mit den Randmorphisismen S_* und S_*' kommutiert.

11. Satz (abstrakte Def. linksderivierter Funktoren)

$\mathcal{A}$ abelsch mit genügend proj. Objekten

Die linksderivierten Funktoren $L_i F$ eines rechts-exakten Funktors F bilden einen universellen $\mathcal{S}$ -Funktork.

Beweis:

$\mathcal{S}$ -Funktork: klar aus Satz 9, bis auf Natürlichkeit.

Natürlichkeit: Weibel, Theorem 2.4.6.

universell: Weibel

□

12. Übung: Ist F exakt, so ist
 $L_i F = 0 \quad \forall i > 0.$