

D2: Tor

R Ring

1. (vorläufige) Def.: $\mathrm{Tor}_i^R(-, -) := L_i(- \otimes_R -)$

Zwei Interpretationen:

(a) Für $M \in \mathcal{O}_R \mathrm{Mod}$ ist $\mathbb{F}$

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, -) := L_i(\overbrace{M \otimes_R -}) : {}_R \mathrm{Mod} \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$$

Zur Berechnung von $\mathrm{Tor}_i^R(M, N)$ wählen wir also eine projektive Auflösung $P_\bullet \rightarrow N$.

Dann ist

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, N) = H_i(M \otimes_R P_\bullet)$$

(b) Für $N \in \mathcal{O}_R \mathrm{Mod}$ ist

$$\mathrm{Tor}_i^R(-, N) := L_i(- \otimes_R N) : \mathrm{Mod}_R \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$$

Zur Berechnung von $\mathrm{Tor}_i^R(M, N)$ wählen wir also eine projektive Auflösung $P_\bullet \rightarrow M$.

Dann ist

$$\mathrm{Tor}_i^R(M, N) = H_i(P_\bullet \otimes_R N)$$

2. Satz: Diese beiden Interpretationen stimmen überein; es ist also für jedes i

$$L_i(M \otimes_R -)(N) \cong L_i(- \otimes_R N)(M).$$

Beweis: Weibel § 2.7 (besser verständlich als Spektralsequenz-Argument). $\square$

3. Satz:

- (a) $\text{Tor}_i^R(M, N) = 0 \quad \forall i \neq 0$ falls M flach oder N flach.
- (b) $\text{Tor}_i^R(\bigoplus_j M_j, N) \cong \bigoplus_j \text{Tor}_i^R(M_j, N)$
 $\text{Tor}_i^R(M, \bigoplus_j N_j) \cong \bigoplus_j \text{Tor}_i^R(M, N_j)$
- (c) Falls R kommutativ ist, ist
 $\text{Tor}_i^R(M, N) \cong \text{Tor}_i^R(N, M)$

Beweis:

a: Sei M flach

explizit: Sei $P_\bullet \rightarrow N$ projektive Auflösung.

Da M flach ist, ist

$$M \otimes_R P_\bullet \rightarrow M \otimes_R N \rightarrow 0$$

exakt, hat also triviale Homologie.

abstrakt: $M \otimes_R -$ ist exakt, also ist $L_i(M \otimes_R -) = 0$
für alle $i \neq 0$ — siehe Übung 12.

b: Folgt aus expliziter Def., denn:

Sind $P_\bullet^{(i)} \rightarrow M_i$ projektive Auflösungen, so
ist $\bigoplus_j P_\bullet^{(j)} \rightarrow \bigoplus_j M_j$ eine projektive Auflösung,
und sowohl $- \otimes_R N$ als auch H_i sind mit
 $\bigoplus_j$ verträglich.

c: $M \otimes_R - \cong - \otimes_R M$, also folgt dies aus Satz 2. $\square$

4. Satz (Tor über HIR)

Über einem HIR R gilt:

$$(a) \operatorname{Tor}_i^R(M, N) = 0 \quad \forall i \geq 2.$$

$$(b) \operatorname{Tor}_1^R(R/d, N) = \underbrace{\ker(N \xrightarrow{d} N)}_{d\text{-Torsion von } N} \quad \forall d \in R \setminus \{0\}$$

Beweis:

a: Jeder Modul M hat eine freie Auflösung der Form:

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow R^{\oplus k} \xrightarrow{\varepsilon} R^{\oplus n} \rightarrow M \rightarrow 0$$

↑ Kern von ε ist frei, da R HIR.

b: Betrachte projektive Auflösung

$$\boxed{\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow R \xrightarrow{d} R} \rightarrow R/d \rightarrow 0$$

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow N \xrightarrow{d} N \rightarrow 0 \rightarrow 0$$

Grad 1 Grad 0

$$\dots \quad 0 \quad 0 \quad \ker(d) \quad \left(\begin{array}{c} \operatorname{coker}(d) \\ N/d \cdot N \\ \cong \\ R/d \oplus_R N \end{array} \right) \quad 0 \quad 0$$

Homologie

□