

# D3: Rechtsderivierte Funktoren

## Injektive Auflösungen

$\mathcal{A}$  abelsche Kategorie

1. Def.: Eine **Rechts-Auflösung** eines Objekts  $M$  aus  $\mathcal{A}$  ist ein Komplex  $I_\bullet$  aus  $\text{Kom}(\mathcal{A})$  mit  $I_i = 0 \quad \forall i > 0$  zusammen mit einem Morphismus  $M \xrightarrow{\varepsilon} I_\bullet$ .

$M$  aufgefasst als Komplex, der in Grad 0 konzentriert ist.

derart, dass

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\varepsilon} I_0 \rightarrow I_{-1} \rightarrow I_{-2} \rightarrow \dots$$

exakt ist.

Sie heißt **injektiv**, falls jedes  $I_i$  **injektiv** ist.

2. Def. & Satz:  $\mathcal{A}$  besitzt genügend injektive Objekte, falls für jedes Objekt  $M$  aus  $\mathcal{A}$  ein **injektives** Objekt  $I_0$  mit einem **Monomorphismus**  $M \rightarrow I_0$  existiert. In diesem Fall besitzt jedes Objekt aus  $\mathcal{A}$  eine **injektive Auflöser**.

3. Satz: Injektive Auflösungen sind bis auf Kettenhomotopieäquivalenz eindeutig bestimmt.

Sind  $M \rightarrow I_\bullet$  } injektive Auflösungen, so  
 $N \rightarrow J_\bullet$  }

existiert für jeden Morphismus  $f: M \rightarrow N$  ein  $f_\bullet: I_\bullet \rightarrow J_\bullet$  derart, dass

$$\begin{array}{ccc} M & \rightarrow & I. \\ f \downarrow & & \downarrow f. \\ N & \rightarrow & J. \end{array}$$

Kommutiert, und dieses  $f_*$  ist bis auf Homotopie eindeutig.

**Beweis beider Sätze:**

$$I \text{ injektiv in } \mathcal{A} \iff I \text{ projektiv in } \mathcal{A}^{\text{op}}$$

$$\begin{array}{ccc} M \rightarrow I. \text{ injektive} & & I. \rightarrow M \text{ projektive} \\ \text{Auflösung in } \mathcal{A} & \iff & \text{Auflösung in } \mathcal{A}^{\text{op}} \end{array}$$

Also lassen sich Resultate aus D1 übertragen.  $\square$

**4. Satz:** Es gibt genügend injektive  $R$ -Moduln, für jeden Ring  $R$ .

**Beweis  $R = \mathbb{Z}$ :**

Wir zeigen: für jede abelsche Gruppe  $A$  ist

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & \prod_{\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ a & \mapsto & (f(a))_{f: A \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}} \end{array}$$

ein Monomorphismus in eine injektive abelsche Gruppe.

- $\prod \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  ist injektiv, da divisibel (M5, Korollar 7).
- Sei  $a \in A$ ,  $a \neq 0$ . Dann ist  $i(a) \neq 0$ :

$$\{0, a, a+a, a+a+a, \dots, -a, -a-a, \dots\}$$

Betrachte Untergruppen  $(a)$ , die von  $a$  erzeugt wird.

Wähle einen Epimorphismus  $(a) \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m$   
mit  $m \neq 1$ .

$$a \mapsto \overline{1}$$

(Falls  $a$  endlicher Ordnung:  
 $m = \text{ord}(a)$ )

$$(a) \xrightarrow{\cong} \mathbb{Z}/m$$

Falls  $a$  unendlicher Ordnung:  
wähle  $m > 1$   
beliebig

$$(a) \cong \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m$$

Definiere

$$\begin{array}{ccc} g: (a) & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}/m \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\ & & \overline{i} \mapsto \overline{i/m} \\ & & a \mapsto \overline{1/m} \neq 0 \end{array}$$

Da  $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  injektiv, können wir  $g$  auf  $A$  fortsetzen.

$$\begin{array}{ccc} (a) & \hookrightarrow & A \\ \downarrow g & \swarrow f & \uparrow a \\ \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & & \\ \overline{1/m} \neq 0 & & \end{array}$$

Also ist  $(i(a))_f = f(a) \neq 0$ .

□

Beweisansatz für allgemeineres  $R$ :

Für jeden  $R$ -Modul  $M$  ist

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \prod_{\text{Hom}_R(M, I)} I \\ m & \longmapsto & (f(m))_{f: M \rightarrow I} \end{array}$$

mit  $I := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$  ein Monomorphismus  
in einen injektiven  $R$ -Modul.  $[ \dots ]$

□

## Rechtsderivierte Funktoren

$\mathcal{A}, \mathcal{B}$  abelsch,  $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  additiven Funktor

### 5. Konstruktive Def.:

$\mathcal{A}$  mit genügend **injektiven** Objekten

$F$  **linksexakt**

Die **rechtsderivierten Funktoren**  $R^i F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$

sind wie folgt def.:

Wähle zu jedem Objekt  $X$  aus  $\mathcal{A}$  eine **injektive** Auflösung  $(I_*(X), \epsilon_X)$ ; zu jedem Morphismus

$f: X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{A}$  ein  $f_*: I_*(X) \rightarrow I_*(Y)$  wie in

Satz 3. Definiere

$$(R^i F)(X) := H_{-i}(F I_*(X))$$

$$(R^i F)(f) := H_{-i}(F f_*)$$

### 6. Satz:

(a)  $R^i F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  ist ein additiver Funktor

(b)  $R^i F$  ist unabhängig von der Wahl der Auflösungen, bis auf (natürliche) Isomorphie.

(c)  $R^0 F \cong F$  und  $R^i F = 0 \quad \forall i < 0$ .

(d) (Existenzberechtigung:)

Für jede k.e.S.

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \rightarrow 0 \quad \text{in } \mathcal{A}$$

passen die derivierten Funktoren in eine lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{c}
0 \rightarrow FX \rightarrow FY \rightarrow FZ \\
\searrow \delta^1 \\
\rightarrow R^1FX \rightarrow R^1FY \rightarrow R^1FZ \\
\searrow \delta^2 \\
\rightarrow R^2FX \rightarrow R^2FY \rightarrow R^2FZ \\
\searrow \\
\rightarrow \dots
\end{array}$$

Beweis:

$$F: A \rightarrow B \text{ linksexakt} \iff F: A^{\text{op}} \rightarrow B^{\text{op}} \text{ rechtsexakt}$$

$$A \text{ hat genügend injektive Objekte} \iff A^{\text{op}} \text{ hat genügend projektive Objekte}$$

usw.

Also ist  $R^i F = (L_i(F^{\text{op}}))^{\text{op}}$  und D1, Satz 8 lässt sich übertragen. □

