

D4: Ext

R Ring

1. (vorläufige) Def: $\text{Ext}_R^i(-, -) := R^i \text{Hom}_R(-, -)$

Zwei Interpretationen:

(a) Für jeden R -Modul M ist $\text{Ext}_R^i(M, -) := R^i \text{Hom}_R(M, -)$

Zur Berechnung von $\text{Ext}_R^i(M, N)$ wählen wir eine **injektive** Auflösung $N \rightarrow I_\bullet$.

Dann ist

$$\text{Ext}_R^i(M, N) = H_{-i}(\text{Hom}_R(M, I_\bullet))$$

(b) Für jeden R -Modul N ist $\text{Ext}_R^i(-, N) := R^i \text{Hom}_R(-, N)$

$$\text{Hom}_R(-, N): \text{Mod}_R^{\text{op}} \rightarrow \text{Ab}$$

Zur Berechnung von $\text{Ext}_R^i(M, N)$ wählen wir eine **injektive** Auflösung von M in Mod_R^{op} , also eine **projektive** Auflösung $P_\bullet \rightarrow M$ in Mod_R . Dann ist

$$\text{Ext}_R^i(M, N) = H_{-i}(\underbrace{\text{Hom}_R(P_\bullet, N)}_{\text{in Grad } \leq 0!})$$

2. Satz: Die beiden Interpretationen stimmen überein, also $(R^i \text{Hom}(M, -))(N) \cong (R^i \text{Hom}(-, N))(M)$.

Beweis: wieder Weibel § 2.7

□

3. Satz:

(a) $\text{Ext}_R^i(M, N) = 0$ falls M projektiv oder N injektiv.

$$\begin{aligned} (b) \quad \text{Ext}_R^i(\bigoplus_i M_i, N) &\cong \prod_i \text{Ext}_R^i(M_i, N) \\ \text{Ext}_R^i(M, \prod_i N_i) &\cong \prod_i \text{Ext}_R^i(M, N_i) \end{aligned}$$

Beweis:

a: wie DZ, Satz 3.

b: wie DZ, Satz 3 — beachte:

$$\operatorname{Hom}_R(\oplus M_i, N) \cong \prod_i \operatorname{Hom}(M_i, N) \quad (\mathcal{U} \text{ von } \oplus_i)$$

$$\operatorname{Hom}_R(M, \prod_i N_i) \cong \prod_i \operatorname{Hom}(M, N_i) \quad (\mathcal{U} \text{ von } \prod_i)$$

Summen projektiver Objekte sind projektiv. } i.A.
Produkte injektiver Objekte sind injektiv.

Summen exakter Sequenzen sind exakt. } \operatorname{Mod}_R
Produkte exakter Sequenzen sind exakt.

□

4. Satz (Ext über HIR)

Über jedem HIR R gilt:

$$(a) \quad \operatorname{Ext}_R^i(M, N) = 0 \quad \forall i \geq 2$$

$$(b) \quad \operatorname{Ext}_R^1(R/d, N) = N/dN \quad \forall d \in R \setminus \{0\}$$

Beweis:

a: Analog zu DZ, Satz 4 — benutze kurze freie
Auflösung von M .

b:

$$R \xrightarrow{\cdot d} R \twoheadrightarrow R/d$$

) $\operatorname{Hom}(-, N)$

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}_R(R, N) & \xleftarrow{\cdot d} & \operatorname{Hom}_R(R, N) \\ \parallel & & \parallel \\ N & & N \end{array}$$

Grad -1

Grad 0

$H_{-1}(\dots)$

$$\operatorname{Ext}^1(M, N) = \operatorname{co ker}(d)$$

□

5. Satz/Beispiel: $R = \mathbb{Z}$

$$\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(A, \mathbb{Z}) \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}) \text{ falls } A \text{ Torsionsgruppe}$$

Beweis:

Benutze injektive Auflösung $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \xrightarrow{-1} \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}}$ $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, -)$

$$\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}) \xrightarrow{-1} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \frac{\mathbb{Q}}{\mathbb{Z}})$$

$= 0,$

$$\begin{aligned} f: A &\rightarrow \mathbb{Q} \\ \cup \\ g & \\ n \cdot a &= 0 \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N} \\ n \cdot f(a) &= 0, \text{ also } f(a) = 0. \end{aligned}$$

da A Torsionsgruppe.

□

Warum Ext ?

6. Def.: $\mathcal{A}$ abelsche Kategorie; $A, B \in \text{obj } \mathcal{A}$.

Eine Erweiterung (extension) von A durch B ist eine k.e.S. der Form

$$\mathcal{E}: 0 \rightarrow B \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow 0$$

Zwei Erweiterungen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{E}'$ von A durch B sind äquivalent, falls es einen Iso

$X \xrightarrow{\cong} X'$ gibt derart, dass folgendes

Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{E}: & 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & X & \rightarrow & A & \rightarrow & 0 \\ & & & \parallel & & \downarrow \cong & & \parallel & & \\ \mathcal{E}': & 0 & \rightarrow & B & \rightarrow & X' & \rightarrow & A & \rightarrow & 0 \end{array}$$

Eine Erweiterung heißt spaltend, falls die k.e.S. spaltet.

7. Bsp.: In Ab sind

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/3 \rightarrow \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3 \rightarrow \mathbb{Z}/3 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{\cdot 1} \mathbb{Z}/3 \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/3 \xrightarrow{\cdot 3} \mathbb{Z}/9 \xrightarrow{\cdot (-1)} \mathbb{Z}/3 \rightarrow 0$$

drei nicht-äquivalente Erweiterungen von $\mathbb{Z}/3$ durch $\mathbb{Z}/3$.

Wir konstruieren eine Abb.

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{l} \text{Erweiterungen} \\ \text{von } A \text{ durch } B \end{array} \right\} & \xrightarrow{\textcircled{H}} & \text{Ext}^1(A, B) \\ \xi & \mapsto & \partial_\xi(\text{id}_B) \end{array}$$

wie folgt:

$$\text{Betrachte zu } \xi = (0 \rightarrow B \xrightarrow{\quad \overset{t}{\curvearrowright} \quad} X \rightarrow A \rightarrow 0)$$

die von $\text{Hom}(-, B)$ induzierte lange exakte Sequenz

$$\begin{array}{c} 0 \rightarrow \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(X, B) \xrightarrow{\quad \overset{*}{\curvearrowright} \quad} \text{Hom}(B, B) \xrightarrow{\quad \overset{\text{id}_B}{\curvearrowright} \quad} 0 \\ \partial_\xi \searrow \hspace{10em} \uparrow \textcircled{H}(\xi) \\ \hspace{10em} \text{Ext}^1(A, B) \end{array}$$

Definiere wie angegeben $\textcircled{H}(\xi) := \partial_\xi(\text{id}_B)$.

8. Satz: Für $\mathcal{A} = \text{Mod}_R$ induziert $\textcircled{H}$ eine Bijektion

$$\frac{\left\{ \begin{array}{l} \text{Erweiterungen} \\ \text{von } A \text{ durch } B \end{array} \right\}}{\sim \text{Äquivalenz}} \xrightarrow{1:1} \text{Ext}_R^1(A, B)$$

Die spaltende Erweiterung entspricht dabei der $0 \in \text{Ext}_R^1(A, B)$.

9. Bemerkungen: $\textcircled{H}$ ist ein Gruppenisomorphismus bzgl. der „Baer-Summe“ auf der Menge der Erweiterungen / Äquivalenz.

10. Beispiel: $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/n) \cong \mathbb{Z}/n \cong \mathbb{Z}/n$
↑
Satz 4

Es gibt also (laut Satz 4) verschiedene Erweiterungen von $\mathbb{Z}/n$ durch $\mathbb{Z}/n$.
↑ nicht-äquivalente

Übung: Ist $n=p$ eine Primzahl, so entspricht $0 \neq i \in \mathbb{Z}/p \cong \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p)$ der Erweiterung

$$0 \rightarrow \mathbb{Z}/p \xrightarrow{i} \mathbb{Z}/p^2 \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/p \rightarrow 0$$

(vgl. Beispiel 7).

Beweis:

Wir zeigen zuerst:

$$(\xi: 0 \rightarrow B \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow 0) \text{ spaltet} \iff \partial_{\xi}(\text{id}_B) = 0$$

($\Rightarrow$) Da ξ spaltet, spaltet auch j^* in $\text{Hom}(\xi, B)$.
 Also ist $\text{im}(j^*) = \ker(\partial_{\xi})$ alles, also $\partial_{\xi} = 0$.

($\Leftarrow$) Exaktheit der Sequenz, in der ∂_{ξ} steht,
 impliziert: $\exists t \in \text{Hom}(X, B): j^*(t) = \text{id}_B$,
 also $t \circ j = \text{id}_B$.

Dieses t spaltet ξ (vgl. Blatt 13, Aufgabe 3).

Konstruiere nun Umkehrabbildung

$$\begin{array}{ccc} \{ \text{Erweiterungen} \}_{/ \sim} & \longleftarrow & \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(A, B) \\ & & \downarrow \psi \\ & \longleftarrow & X \end{array}$$

ξ_x

Fixiere dazu eine k.e.s.

$$0 \rightarrow K \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} A \rightarrow 0$$

mit P projektiv. Betrachte die von $\text{Hom}(-, B)$

induzierte lange exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \text{Hom}(A, B) \rightarrow \text{Hom}(P, B) \rightarrow \text{Hom}(K, B) \\ &\searrow \text{Ext}^1(A, B) \rightarrow \underbrace{\text{Ext}^1(P, B)}_{=0, \text{ da } P \text{ projektiv.}} \end{aligned}$$

Wähle ein Urbild $\beta \in \text{Hom}(K, B)$ von α , also $\partial\beta = \alpha$.

Definiere X als das folgend eingezeichnete Pushout:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & P & \xrightarrow{\pi} & A \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \beta & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & B & \xrightarrow{\gamma} & X & \xrightarrow{\overline{(\pi)}} & A \longrightarrow 0 \end{array} \quad (*)$$

Definiere $X \rightarrow A$ als den durch π und 0 induzierten Morphismus.

Definiere ξ_x als die untere Zeile von $(*)$.

Prüfe: $\cdot \Sigma_x$ ist exakt

- ξ_x ist bis auf Äquivalenz unabhängig von Wahl von β .

$$\cdot \textcircled{H}(\mathbb{E}_x) = x.$$

• $\xi_{\oplus}(S)$ ist äquivalent zu ξ .

[...] [...] [...]



