

D5: Gruppen(ko)homologie

G eine Gruppe

1. Def.: Der Gruppenring $\mathbb{Z}G$ oder $\mathbb{Z}[G]$ von G ist der eindeutige Ring, der als abelsche Gruppe gegeben ist durch

$$\mathbb{Z}G := \bigoplus_{g \in G} \mathbb{Z} \cdot e_g$$

und dessen Multiplikation $e_g \cdot e_h := e_{g \cdot h}$ erfüllt ($\forall g, h \in G$).

Notiz: $1 := e_{\text{neutrales Element von } G}$ ist das Einselement von $\mathbb{Z}G$



Ist G nicht abelsch, ist $\mathbb{Z}G$ nicht kommutativ.

2. Beispiele

$$(a) \quad \underbrace{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}]}_{e_n \hat{=} x^n} \cong \underbrace{\mathbb{Z}[x, x^{-1}]}_{x^n} \quad (= \mathbb{Z}[x, x^{-1}] / (x^n - 1))$$

$$(b) \quad \underbrace{\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/n]}_{e_n \hat{=} x^n} \cong \mathbb{Z}[x] / (x^n - 1)$$

3. Def.: Ein G -Modul ist ein $\mathbb{Z}G$ -Linksmodul.

$$\text{Kategorie } \mathbb{Z}G\text{Mod} = \left\{ \begin{array}{l} G\text{-Moduln} \\ \text{und} \\ \text{Links-}\mathbb{Z}G\text{-lineare} \\ \text{Abb.} \end{array} \right.$$

Alternativ können wir G -Modul A auffassen als abelsche Gruppe A mit einer $\mathbb{Z}$ -linearen Links- G -Operation.

suggestive Notation: $e_g \cdot a =: g \cdot a$ für $a \in A$

Ein G -Modul A ist **trivial**, falls

$g \cdot a = a$ für alle $g \in G$ und alle $a \in A$.

4. Beispiel: Der Ringhomomorphismus

$$\varepsilon: \mathbb{Z}G \xrightarrow{e_g} \mathbb{Z} \xrightarrow{1}$$

erlaubt uns, $\mathbb{Z}$ als trivialen $\mathbb{Z}G$ - $\mathbb{Z}G$ -Bimodul aufzufassen.

(Also: für $g \in G$, $u \in \mathbb{Z}$ ist $g \cdot u = u = u \cdot g$)

5. Def.: Die invariante Untergruppe eines G -Moduls A ist $A^G := \{a \in A \mid g \cdot a = a\}$.

Die kovariante Untergruppe ist

$$A_G := \frac{A}{\text{Untergruppe, die von } g \cdot a - a \text{ (für alle } a \in A, g \in G) \text{ erzeugt wird}}$$

6. Notiz: $()^G$ & $()_G$ definieren Funktoren $\mathbb{Z}G\text{Mod} \longrightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$

7. Satz: Wir haben natürliche Isomorphismen

$$\begin{aligned} ()^G &\cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, -) \\ ()_G &\cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} - \end{aligned}$$

$\mathbb{Z}$ als trivialer Links- $\mathbb{Z}G$ -Modul
 $\downarrow$
 $\mathbb{Z}$ als trivialer Rechts- $\mathbb{Z}G$ -Modul
 $\uparrow$

Beweis: siehe Blatt 9, Aufgabe 4 (a) & (b)

A^G :

$$\begin{array}{ccc} A^G & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A) \\ a & \mapsto & (u \mapsto u \cdot a) \\ f(1) & \longleftarrow & f \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{ccc} A^G & \xrightarrow{\cong} & \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A) \\ a & \mapsto & (u \mapsto u \cdot a) \\ f(1) & \longleftarrow & f \end{array}} \right\} \begin{array}{l} \text{prüfe:} \\ - \text{ wohl def.} \\ - \text{ inverse} \\ - \text{ natürlich} \end{array}$$

A_G :

$$\begin{array}{ccc} A_G & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \\ \bar{a} & \mapsto & 1 \otimes a \\ \overline{u \cdot a} & \longleftarrow & u \otimes a \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(eindeutige } \mathbb{Z}\text{-lineare Abs.} \\ \text{mit dieser Eigenschaft)} \end{array}$$

alternativ:

nicht-kommutative Version von M3, Satz 4 (a)

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \cong \mathbb{Z}G / \alpha \otimes_{\mathbb{Z}G} A \cong A / \alpha \cdot A \cong A_G$$

$\uparrow$ mit $\alpha := \ker(\varepsilon)$ (beidseitiges Ideal)
 $= (e_g - 1 \mid g \in G)$

□

7. Notiz: Wir haben zwei Adjunktionen

$$\mathbb{Z}G \text{ Mod} \begin{array}{c} \xrightarrow{(\)_G} \\ \xleftarrow{\text{Triv}} \\ \xrightarrow{(\)_G} \end{array} \text{ Ab},$$

wobei Triv eine abelsche Gruppe
auffasst als trivialen G -Modul.

(Folgt aus K6, Bsp. 3d und

$$\text{Triv} \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}, -) \cong \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} -.$$

$\uparrow$ trivialer Rechts- $\mathbb{Z}G$ -Modul $\uparrow$ trivialer Links- $\mathbb{Z}G$ -Modul

modulo Links & Rechts vertauschen.

einfacher: direkt nachrechnen.)

8. Def.: Die Homologiegruppen von G mit Koeffizienten in einem G -Modul A mit *projektive Auflösung?*

$$H_i(G; A) := \text{Tor}_i^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$$

$$(\quad = L_i((-)_G) \quad)$$

projektive Auflösung?

Die Kohomologiegruppen von G mit Koeffizienten in einem G -Modul A

$$H^i(G; A) := \text{Ext}_{\mathbb{Z}G}^i(\mathbb{Z}, A)$$

$$(\quad = R^i((-)^G) \quad)$$

Per Definition ist also

$$H_0(G; A) \cong A_G \cong \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A$$

$$H^0(G; A) \cong A^G \cong \text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A)$$

projektive Aufl.? *injektive Auflösung?*

9. Beispiele

(a) $G = 1$ — $\mathbb{Z}G = \mathbb{Z}$, $A^G \cong \text{Id}$, $A_G \cong \text{Id}$

$$H_0(G; A) \cong H^0(G; A) \cong A$$

$$H_i(G, A) \cong H^i(G; A) = 0 \quad \forall i \geq 1$$

(z.B. da Id exakter Funktor)

(b) $G = \mathbb{Z}/n$ $\mathbb{Z}G \cong \mathbb{Z}[\bar{x}] := \mathbb{Z}[x] / x^n - 1$

Wir haben freie Auflösung von $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}G$ -Modul:

$$\dots \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[\bar{x}] \xrightarrow{(\bar{x}-1)} \mathbb{Z}[\bar{x}] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[\bar{x}] \xrightarrow{(\bar{x}-1)} \mathbb{Z}[\bar{x}] \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$$

$\bar{x} \mapsto 1$

mit $N := \sum_{i=0}^{n-1} \bar{x}^i$.

$$\begin{aligned} \ker(\cdot(\bar{x}-1)) &= \left\{ \sum a_i \bar{x}^i \mid a_i = a_{i-1} \right\} \quad (a_{-1} = a_{n-1}) \\ &= \left\{ a \sum_{i=0}^{n-1} \bar{x}^i \mid a \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \{ a \cdot N \mid a \in \mathbb{Z} \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ker \varepsilon &= \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \mid \sum_{i=0}^{n-1} a_i = 0 \right\} \\ &\stackrel{\dots}{=} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i-1} - b_i) x^i \mid b_i \text{ beliebig} \right\} \quad (b_{-1} := b_{n-1}) \\ &= \left\{ \left(\sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \right) \cdot (\bar{x}-1) \mid b_i \text{ beliebig} \right\} \\ &= (\bar{x}-1) \quad (\text{von } \bar{x}-1 \text{ erzeugtes Ideal}) \end{aligned}$$

$$\ker N = \dots = (\bar{x}-1)$$

$H_i(G; A)$: Wende $- \otimes_{\mathbb{Z}G} A$ auf Auflösung an:

$$\boxed{\dots \xrightarrow{N} A \xrightarrow{(\bar{x}-1)} A \xrightarrow{N} A \xrightarrow{(\bar{x}-1)} A} \quad \downarrow H_i$$

$$\frac{A^G}{N(A)}$$

$$\frac{\ker N}{(\bar{x}-\text{id})(A)}$$

$$\frac{A^G}{N(A)}$$

$$\frac{A}{(\bar{x}-\text{id})(A)} \cong A_G \checkmark$$

Also: $H_i(\mathbb{Z}/n; A) = \begin{cases} A_{\mathbb{Z}/n} & i=0 \\ \frac{A_{\mathbb{Z}/n}}{N(A)} & i>0 \text{ ungerade} \\ \frac{\ker(N: A \rightarrow A)}{(\bar{x}-\text{id})(A)} & i>0 \text{ gerade} \end{cases}$

(Es folgt insbesondere:

$\mathbb{Z}$ kann keine projektive Auflösung endlicher Länge als $\mathbb{Z}G$ -Modul haben.)

$H^i(G; A)$: Wende $\text{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-, A)$ auf Auflösung an:

$$\dots \xleftarrow{N \cdot} A \xleftarrow{(\bar{x} \cdot) \cdot} A \xleftarrow{N \cdot} A \xleftarrow{(\bar{x} \cdot) \cdot} A$$

Somit:

$$H^i(\mathbb{Z}_n, A) = \begin{cases} A^{\mathbb{Z}_n} & i=0 \\ \frac{\ker(N: A \rightarrow A)}{(\bar{x}-1)A} & i>0 \text{ ungerade} \\ \frac{A^{\mathbb{Z}_n}}{N(A)} & i>0 \text{ gerade} \end{cases}$$

Übung: Berechne explizit $H^*(\mathbb{Z}_n; \mathbb{Z})$

