

K2: Was tun ohne Elemente?

Sets	allgemeine Kategorie
Bijektion	Isomorphismus
injektive Abb.	Monomorphismus
surjektive Abb.	Epimorphismus
$\emptyset$	Anfangsobjekt 0
Einpunktmenge $\leadsto *$	Endobjekt 1
$x \in S$	$\begin{cases} 1 \xrightarrow{x} S \\ x \xrightarrow{x} S \end{cases}$

1. Def.: Ein Morphismus $X \xrightarrow{i} Y$ ist ein **Monomorphismus**, falls für beliebige Morphismen $T \xrightarrow[t_2]{t_1} X$ gilt:

$$i \circ t_1 = i \circ t_2 \Rightarrow t_1 = t_2$$

Ein Morphismus $X \xrightarrow{q} Y$ ist ein **Epimorphismus**, falls für beliebige Morphismen $Y \xrightarrow[t_2]{t_1} T$ gilt:

$$t_1 \circ q = t_2 \circ q \Rightarrow t_1 = t_2$$

Ein **spaltender Monomorphismus** ist ein Morphismus i , für den ein Morphismus s mit $soi = id$ existiert.

Ein **spaltender Epimorphismus** ist ein Morphismus q , für den ein Morphismus t mit $qot = id$ existiert.

2. Notiz: (a) Jeder spaltende Mono ist ein Mono.
 (b) Jeder spaltende Epi ist ein Epi.
 (c) Jeder Iso ist (spaltender) Mono & Epi.

3. Beispiele

	Mono	Epi
Sets	injektive Abb.	surjektive Abb.
Top	injektive Abb.	surjektive Abb.
Ab	injektive Abb.	surjektive Abb.
$\subset$ Rings	injektive Abb.	?
↑ kommutative Ringe & Ringhomomorphismen		
eine partiell geordnete Menge	alle Morphismen (nur rd spaltet)	alle Morphismen (nur rd spaltet)

zu Sets: spaltende Monomorphismen sind injektive Abb.

$$X \xrightarrow{i} Y \quad \text{mit} \quad X \neq \emptyset \text{ falls } Y \neq \emptyset.$$

spaltende Epimorphismen sind alle surjektiven
 Abb. (Auswahlaxiom)

zu Top:

Sei $X \xrightarrow{i} Y$ Mono. Betrachte $x_1, x_2 \in X$ mit $i(x_1) = i(x_2)$.

Sie definieren stetige Abb. $\star \xrightarrow[f_{x_2}]{f_{x_1}} X$.

Offenbar $i \circ f_{x_1} = i \circ f_{x_2}$. Da i Mono, folgt $f_{x_1} = f_{x_2}$.

Also $x_1 = x_2$.

Sei umgekehrt $X \xrightarrow{i} Y$ injektiv,

$T \xrightarrow[t_2]{t_1} X \xrightarrow{i} Y$ gegeben mit $i \circ t_1 = i \circ t_2$.

Dann ist auch $i \circ t_1 = i \circ t_2$ in Sets.

(Pedantische Notation: $\mathcal{U}: \text{Top} \rightarrow \text{Sets}$ Vergessf.)

Es ist $\mathcal{U}(i \circ t_1) = \mathcal{U}(i \circ t_2)$,

also $\mathcal{U}(i) \circ \mathcal{U}(t_1) = \mathcal{U}(i) \circ \mathcal{U}(t_2)$.)

Da i injektiv, folgt $t_1 = t_2$ in Sets.

Also auch $t_1 = t_2$ in Top.

//

Viele Monomorphismen spalten nicht:

z.B. $S^1 \hookrightarrow D^2$



Es gibt keine stetige Abb.

$S^1 \xleftarrow{r} D^2$ mit $r \circ i = \text{id}$

// (Brouwersche Fixpunktsatz). (Beweis: Wendet π_1 an.)

Sei $X \xrightarrow{q} Y$ Epi. Betrachte $T := \frac{Y}{q(X)}$.

$t_1: Y \longrightarrow T$ Quotientenabb.

$t_2: Y \longrightarrow T$ konstant auf den Punkt $[q(X)]$

Offenbar $t_1 \circ q = t_2 \circ q$, also $t_1 = t_2$. Also

$T = \{[q(X)]\}$, also $q(X) = Y$, also q surjektiv.

(surj. $\Rightarrow$ Epi) analog zu (inj. $\Rightarrow$ Mono)

// Viele Epimorphismen spalten nicht:

z.B.



(Beweis: Wende π_1 an.)

zu Ab (abelsche Gruppen):

(Mono $\Rightarrow$ inj.) Nutze, dass ein Element $x \in X$

genau einem Morphismus $\mathbb{Z} \longrightarrow X$
 $1 \mapsto x$
 entspricht.

($\ast \longrightarrow \ast$)

(inj. $\Leftarrow$ Mono) wie bei Top

(Epi $\Rightarrow$ surj.) Betrachte wieder $T := \frac{Y}{\text{im}(q)}$,

$t_1: Y \longrightarrow T$ Quotientenabb.

$t_2: Y \longrightarrow T$ Nullhomomorphismus

zu c Rings:

(Mono $\Rightarrow$ inj.) Nutze, dass ein Element $x \in X$
genau einem Ringhomomorphismus $\mathbb{Z}[\epsilon] \xrightarrow{\epsilon} X$
entspricht
↑
Polynomring

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \text{ ist ein Epimorphismus}$$
$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \xrightarrow[t_2]{t_1} T$$

Ist $t_1 \circ i = t_2 \circ i$, so ist $t_1(a) = t_2(a) \quad \forall a \in \mathbb{Z}$,
aber auch $t_1\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{1}{t_1(a)} \quad (t_1 \text{ Ringhomo})$
 $= \frac{1}{t_2(a)}$
 $= t_2\left(\frac{1}{a}\right).$

Es folgt $\dots : t_1 = t_2$.

4. Notiz: Funktoren werfen Isomorphismen auf
Isomorphismen,

spaltende Monos auf spaltende Monos,

spaltende Epis auf spaltende Epis



aber i.A. nicht beliebige Monos auf Monos,
nicht beliebige Epis auf Epis.

(Beweis: $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ Funktor, f in $\mathcal{C}$ Iso.

Nach Def. $\exists g$ in $\mathcal{C}$ mit $f \circ g = \text{id}$ und $g \circ f = \text{id}$.

Nach Def. eines Funktors ist

$$\begin{aligned} F(f \circ g) &= F(f) \circ F(g) \\ &\parallel \\ F(\text{id}) &= \text{id}, \end{aligned}$$

und analog $F(g) \circ F(f) = \text{id}$.

Also ist $F(f)$ Iso mit Inversem $F(g)$.

usw.

)

zu :

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1: & \text{Top.} & \longrightarrow & \text{Grps} & \\ & S^1 & \mapsto & \mathbb{Z} & \\ \text{Mono} & \downarrow & & \downarrow & \text{kein Mono} \\ & D^2 & \mapsto & 0 & \\ & \mathbb{R} & \mapsto & 0 & \\ \text{Epi} & \downarrow \exp & & \downarrow & \text{kein Epi} \\ & S^1 & \mapsto & \mathbb{Z} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{Vergl.} & \text{CRings} & \longrightarrow & \text{Ab} & \\ & \mathbb{Z} & \mapsto & \mathbb{Z} & \\ \text{Epi} & \downarrow & & \downarrow & \text{kein Epi} \\ & \mathbb{Q} & \mapsto & \mathbb{Q} & \end{array}$$

5. Def.: Eine Kategorie ist **ausgewogen** (engl: **balanced**), falls jeder Morphismus, der Mono- und Epimorphismus ist, ein Isomorphismus ist.

6. Beispiele:

Sets



Top

x

(bijektiv $\not\Rightarrow$ Iso)

Ab



cRings

x

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ ist Epi & Mono, aber nicht Iso

eine partiell geordnete Menge x

7. Def: Ein **Anfangsobjekt** / **initiales Objekt**

ist ein Objekt $0 \in \mathcal{C}$

mit folgender (universelle) Eigenschaft:

$$\forall X \in \text{ob } \mathcal{C}: \quad \exists! 0 \rightarrow X$$

Ein **Endobjekt** / **terminales Objekt**

ist ein Objekt $1 \in \mathcal{C}$

mit folgender (universelle) Eigenschaft:

$$\forall X \in \text{ob } \mathcal{C}: \quad \exists! X \rightarrow 1$$

Ein **Nullobjekt** ist ein Anfangsobjekt, das auch Endobjekt ist.

8. Beispiele:

	Anfangsobjekt	Endobjekt
Sets	$\emptyset$	$*$ $\cong \{0\} \cong \{1\} \cong \{=\}$
Top	$\emptyset$	$*$
Top.	$*$ $\downarrow$ $*$	$*$ $\downarrow$ $*$
$[X \downarrow \mathcal{C}]$	$ \begin{array}{ccc} X & & \\ \text{id} \downarrow & \searrow f & \\ X & \dashrightarrow & Y \end{array} $	
Ab	0	0
cRings	$\mathbb{Z}$	0
eine partiell geordnete Menge	ein kleinstes Element (falls es $\exists$)	ein größtes Element (falls es $\exists$)

9. Notiz:

- (a) Anfangs- und Endobjekte müssen nicht existieren.
 (b) Wenn sie existieren, sind sie bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig.

(zu b: Seien 0 und $0'$ zwei Anfangsobjekte.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{\quad} & & \\
 & \searrow & & \nearrow & \\
 0 & \xrightarrow[f]{\exists!} & 0' & \xrightarrow[g]{\exists!} & 0 \\
 & \nearrow & & \searrow & \\
 & & \xrightarrow{\quad} & &
 \end{array}$$

$\exists!$, also $g \circ f = \text{id}_0$

Analog $f \circ g = \text{id}_{0'}$.

)

10. Def: $\mathcal{C}$ Kategorie, $S \in \text{ob } \mathcal{C}$

Ein globales Element von S ist ein Morphismus $1 \rightarrow S$ (falls 1 existiert).

Ein verallgemeinertes Element von S ist ein beliebiger Morphismus $X \rightarrow S$.

11. Beispiel:

Kategorie der affinen Schemata

$$\text{aff Schemes} := (\text{c Rings})^{\text{op}}$$

Für einen Ring A schreiben wir

$\text{Spec } A$ für A aufgefasst als Objekt von aff Schemes

Verallgemeinertes Element von $\text{Spec } A$

= Morphismus $\text{Spec } R \rightarrow \text{Spec } A$
für einen kommutativen Ring A

$\Rightarrow$ Ringhomomorphismus $A \rightarrow R$

" R -wertige Punkte von $\text{Spec } A$ "